

آزمون فرض آماری

۱۱-۱ مقدمه

در مدیریت، تحقیقات اغلب با سؤال و فرضیه شروع می‌شوند. فنون آمار استنباطی برای پاسخ به سؤالات تحقیق، همان فنون تخمین آماری هستند که در فصل دهم بتفصیل بیان شدند. بسیاری از تحقیقات مدیریتی از مرحله سؤال گذر کرده، به مرحله فرضیه می‌رسند. فرضیه حدسی زیرکانه در خصوص پارامتر جامعه است. فنون آماری مناسب برای بررسی صحت یا سقم فرضیه‌ها، فنون «آزمون فرض آماری»^۱ هستند که در این فصل مبانی آنها بیان خواهد شد.

به طور کلی هدف آزمون فرض آماری، تعیین این موضوع است که با توجه به اطلاعات به دست آمده از داده‌های نمونه، حدسی که درباره خصوصیتی از جامعه می‌زنیم به طور قوی تأیید می‌شود یا خیر. این حدس بنا به هدف تحقیق، نوعاً شامل ادعایی درباره مقدار یک پارامتر جامعه است. «در واقع هر حکمی درباره جامعه را یک فرض آماری می‌نامند که قابل قبول بودن آن باید بر مبنای اطلاعات حاصل از نمونه‌گیری از جامعه بررسی شود».

چون ادعا ممکن است صحیح یا غلط باشد؛ بنابراین دو فرض مکمل در ذهن به وجود می‌آید: فرض H (ادعا صحیح است) و فرض H' (ادعا غلط است).
با به کار بردن اطلاعاتی که از مشاهدات نمونه به دست می‌آید، تصمیم‌گیرنده باید یکی از این دو تصمیم یا استنباط را انتخاب کند:

H' را رد کند و نتیجه بگیرد که H به وسیله داده‌ها قویاً تأیید می‌شود.

H' را رد نکند و نتیجه بگیرد که داده‌ها H را قویاً تأیید نمی‌کنند.

فرایند انتخاب یکی از دو تصمیم فوق را آزمون فرض آماری می‌نامند. پذیرش یا عدم پذیرش یک فرض آماری تا حدودی با اثبات یا رد یک گزاره ریاضی متفاوت است. یک گزاره ریاضی را یا اثبات می‌کنند یا اینکه با ارائه مثال ناقض، آن را رد می‌کنند. در هر حالت، نتیجه‌ای که به دست می‌آید، بدون هیچ شکی برقرار است؛ ولی در مقابل، نتیجه حاصل از آزمون فرض آماری به وسیله تحلیل داده‌های تجربی حتمی و قطعی نیست.

شیوه مناسب برای آزمون فرض دارای مراحل منطقی است. قبل از ذکر مراحل مورد نظر به بیان مفاهیم و اصطلاحات استفاده شده در آزمون فرض پرداخته می‌شود. واقعیت آن است که مهمترین مرحله در آزمون فرض آماری تبدیل «فرضیه پژوهشی» و نقیض آن به «فرضیه‌های آماری» است. به طوری که اندیشمندان از این مرحله با عنوان «گلوگاه» یاد می‌کنند؛ بنابراین مرحله فوق به طور مبسوط با عنوان فرض صفر و فرض مقابل تشریح می‌شود.

۲-۱۱ فرض صفر و فرض مقابل

برای بحث درباره فرمولبندی مسأله آزمون فرض آماری و مراحل حل آن، به معرفی پاره‌ای از تعاریف و مفاهیم نیاز داریم. قبل از آنکه به این مبحث به طور کلی بپردازیم، مفاهیم پایه‌ای را از طریق ارائه مسأله خاصی بررسی می‌کنیم که در آن رفتار آزمایش از توزیع دو جمله‌ای پیروی می‌کند.

فرضیه پژوهشی. نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 در کشور بیش از $0/60$ است. فرض کنید یک نمونه مرکب از ۲۰ مدیر انتخاب شده و تعداد افراد برخوردار از سبک S_1 ، X ، ثبت شود. از داده‌های به دست آمده این آزمایش برای پاسخ به این سؤال چگونه می‌توان استفاده کرد: «آیا گواه قانع‌کننده‌ای بر این مدعا وجود دارد که نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 بیش از $0/60$ است؟»

نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 ، همان p است که مقدار آن را تنها وقتی می‌توان به طور صحیح تعیین کرد که آزمایش تعیین سبک بر روی کلیه مدیران کشور انجام گیرد. لکن اطلاعات ما محدود به نتایج حاصل از ۲۰ مدیر است، با فرض اینکه بتوانیم ۲۰ مدیر را به عنوان مشاهدات مستقلی از جامعه تمام مدیران کشور در نظر بگیریم، مدل احتمال X عبارت است از یک توزیع دو جمله‌ای با $n=20$ و پارامتر نامعلوم p .

با توجه به فرضیه‌ای که در صورت مسأله بیان شد دو فرض آماری ذیل مطرح می‌شود:

نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 بیش از ۰/۶۰ است: $p > 0/60$

نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 حداکثر ۰/۶۰ است: $p \leq 0/60$

کمیت نامعلوم، درصد مدیران برخوردار از سبک S_1 است. از دو حکمی که درباره این کمیت نامعلوم وجود دارند، یکی را فرض صفر (H_0) و دیگری را فرض مقابل (H_1) می‌نامند. برای اینکه معلوم شود کدام فرض را باید فرض صفر نامید لازم است که تفاوت اساسی بین نقش و مفهوم این دو اصطلاح بروشنی درک شود.

قبل از اینکه ادعا کنیم حکمی معتبر است، باید شواهد کافی در تأیید آن به دست آوریم. در نتیجه، شخص تحلیلگر باید حکم را غلط بداند مگر اینکه داده‌های به دست آمده خلاف آن را قویاً تأیید کنند. به عبارت دیگر باید فرض صفر (H_0) را صحیح دانست و فقط وقتی آن را رد کرد که داده‌ها قویاً برخلاف آن حکم کنند. تشابه زیادی بین این امر و محاکمه در دادگاه وجود دارد که در آن هیأت منصفه فرض صفر «مجرم نبودن» را اتخاذ می‌کنند مگر اینکه شواهد قانع‌کننده‌ای مجرم بودن متهم را ثابت کنند و نه اینکه در اثبات بیگناهی او بکوشند.

با عنایت به نکات فوق، می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه بخواهیم یک ادعا را از طریق تأیید آن به وسیله اطلاعات حاصل از نمونه آزمون کنیم، نفی آن ادعا را فرض صفر (H_0) و خود آن را فرض مقابل (H_1) می‌گیریم؛ بنابراین تشخیص فرض صفر و فرض مقابل در فرضیه ما باید به این صورت باشد:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 0/60 & \text{نقیض ادعا:} \\ H_1: p > 0/60 & \text{ادعا:} \end{cases}$$

حال به تعریف فرضیه دیگری می‌پردازیم:

فرضیه پژوهشی. میانگین نمره مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان دست کم ۵۰ است. فرضیه‌های آماری این فرضیه براساس روش فوق عبارتند از:

$$\begin{cases} H_0: \mu_x < 50 & \text{(میانگین نمره مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان کمتر از ۵۰ است.)} \\ H_1: \mu_x \geq 50 & \text{(میانگین نمره مسئولیت‌پذیری مدیران سازمان دست کم ۵۰ است.)} \end{cases}$$

قاعده پذیرفته شده در آمار این است که محقق فرض H_0 را آزمون کند و براساس تأیید یا رد فرض H_0 به تحلیل فرضیه پژوهشی بپردازد. واضح است که فرض H_0 در مثال فوق آزمون پذیر نیست، چرا که تعریف آماری آن فاقد مرز شناخته شده است. میانگین کمتر از ۵۰، یک فرض بدون حد مشخص است که هر مقداری را می توان برای آن متصور شد. مشخص است که آزمون چنین فرضیه ای از نظر ریاضی امکانپذیر نیست. پس اگر H_0 آزمون پذیر نیست، ناچار باید از نقیض آن یعنی H_1 استفاده کرد. از آنجا که H_0 دارای تساوی (=) است، پس آزمون پذیر است؛ بنابراین به منظور رعایت اصول آزمون فرض، جای H_0 و H_1 را تغییر داده، به آزمون H_0 به شرح ذیل می پردازیم:

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \geq 50 & \text{ادعا:} \\ H_1: \mu_x < 50 & \text{نقیض ادعا:} \end{cases}$$

تعریف H_0 و H_1 در این فرضیه پژوهشی با فرضیه مربوط به سبک مدیران در ابتدای بحث کاملاً متفاوت است. در فرضیه سبک مدیران H_0 نشان دهنده نقیض فرضیه پژوهشی است و در این فرضیه H_0 نشان دهنده ادعاست. علی رغم مقدمه ابتدای فصل آنچه ما را به تعریف H_0 سوق می دهد، قاعده آزمون پذیر بودن آن است. «قاعده این است که همواره باید فرض صفر دربرگیرنده تساوی باشد. در زمینه نظریه اخیر می توان پذیرفت که H_0 گاهی بیان کننده ادعا و گاهی بیان کننده نقیض ادعاست. آنچه تعریف H_0 را شکل می دهد آزمون پذیر بودن آن است و آن چیزی نیست جز آنکه برای H_0 باید تساوی (=) وجود داشته باشد».

۱۱-۳ سطح معنی دار و خطاهای آماری

وقتی که فرضیه های آماری تعریف شدند، قدم بعدی مشخص کردن درجه ای برای معنی دار بودن تفاوتها (α) و حجمی برای نمونه مورد تحقیق (n) است.

روش کار این است که فرض H_0 را به نفع فرض H_1 رد کنیم به شرط اینکه از یک آزمون آماری مقداری به دست آوریم که احتمال وقوع آن مقدار با توجه به H_0 برابر یا کمتر از یک احتمال بسیار کوچک باشد که با α نشان داده می شود. این احتمال وقوع

کوچک را «سطح معنی دار»^۱ می‌گویند. مقادیر مرسوم برای α بیشتر ۰/۰۱ و ۰/۰۵ است. از آنجا که مقدار α در تعیین اینکه H_0 باید رد شود یا نه دخالت مستقیم دارد، الزام رعایت عینیت در تحقیق ایجاب می‌کند که α را پیش از شروع به جمع‌آوری داده‌ها مشخص کنیم.

سطح معنی داری که محقق برای تعیین α در تحقیق انتخاب می‌کند براساس تخمین او از اهمیت و یا درجه قابلیت کاربرد یافته‌هایش مبتنی است. طبیعی است که اگر تحقیق مثلاً درباره آثار درمانی عمل جراحی روی مغز باشد، محقق باید مقدار α را خیلی کمتر در نظر بگیرد؛ زیرا خطرهای رد کردن نادرست فرضیه صفر - پذیرفتن نابجای فرضیه مقابل آن که احتمالاً به توصیه یک تکنیک درمانی غلط منجر خواهد شد - بسیار زیاد است.

هنگام اتخاذ تصمیم درباره H_0 ممکن است دو نوع خطا پیش آید: یکی «خطای نوع اول»^۲ که عبارت است از رد کردن H_0 در حالی که فرض درست است و دیگری «خطای نوع دوم»^۳ که در آن H_0 پذیرفته می‌شود در حالی که فرض غلط است.

احتمال وقوع خطای نوع اول با α ارتباط دارد؛ هرچه α بزرگتر شود، احتمال اینکه H_0 را به غلط رد کنیم یا به عبارت دیگر احتمال اینکه مرتکب خطای نوع اول شویم، افزایش می‌یابد. خطای نوع دوم معمولاً با β (بتا) نمایش داده می‌شود. α و β در اینجا، هم برای نشان دادن نوع خطاها و هم احتمال ارتکاب آن خطاها به کار می‌روند؛ یعنی:

$$\alpha = P(\text{خطای نوع اول}) = P[H_0 \text{ وقتی } H_0 \text{ درست است}]$$

$$\beta = P(\text{خطای نوع دوم}) = P[H_1 \text{ وقتی } H_0 \text{ درست است}]$$

احتمال α به مقدار مشخص پارامتر در دامنه‌ای بستگی دارد که H_0 آن را دربرمی‌گیرد و حال آن که β به مقدار پارامتر در دامنه‌ای بستگی دارد که H_1 آن را دربرمی‌گیرد. این خطاها و احتمال آنها را در رابطه با H_0 می‌توان در جدول ۱۱-۱ خلاصه کرد.

جدول ۱۱-۱ دو نوع خطای استنباطی: α و β

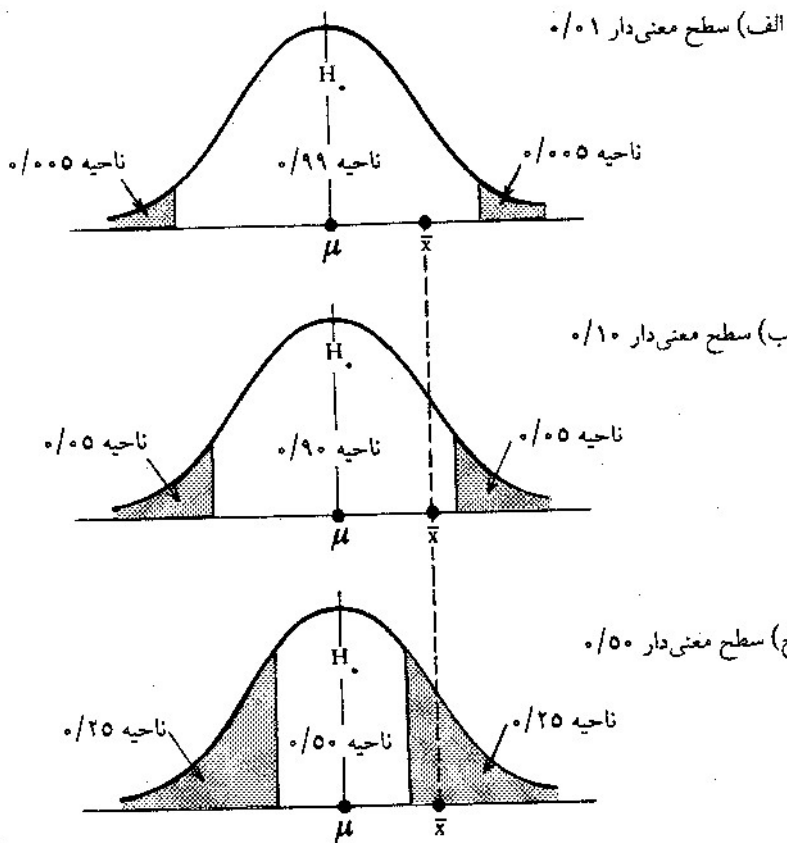
نتیجه گیری از نمونه	گزینه های صحیح	
	H_0 غلط است	H_0 درست است
H_0 پذیرفته می شود	خطای نوع دوم (β)	تصمیم درست
H_0 رد می شود	تصمیم درست (توان آزمون)	خطای نوع اول (α)

واضح است که بین α و β یک رابطه معکوس وجود دارد. با بالا رفتن α ، مقدار β کاهش می یابد و بالعکس. این نوع رابطه در آمار به «بده - بستان» بین α و β معروف است. آنچه مسلم است مجموع α و β الزاماً یک نیست؛ برای مثال، چنانکه در شکل ۱۱-۱ مشاهده می شود با بالا رفتن ناحیه H_0 که دربرگیرنده سطح معنی دار است، سطح H_0 کوچکتر می شود. این بدین معناست که احتمال پذیرش یک فرض نادرست صفر کاهش می یابد، ولی اشکال این اطمینان آن است که ممکن است یک فرض درست صفر را به غلط رد کنیم. این مطلب در شکل ۱۱-۱ «ج» که سطح معنی دار آن ۵۰ درصد است بخوبی مشاهده می شود. در حالی که با کاهش مقدار α در قسمت «الف» شکل فوق فرض H_0 بدرستی انتخاب شده، چون مقدار خطای نوع اول کاهش و خطای نوع دوم افزایش یافته است.

روشن است که در هر استنباط آماری احتمال وقوع یکی از این دو نوع خطا وجود دارد و لازم است که آزمون کننده به نوعی سازش که تعادل بین احتمال وقوع این دو نوع خطا را به حد مطلوب برساند، دست یابد. آزمونهای آماری مختلف، احتمال تعادلهاى مختلفی را عرضه می کنند. در رسیدن به چنین تعادلی است که موضوع «تابع توان»^۲ یک آزمون آماری مطرح می شود.

توان یا قدرت آزمون عبارت است از احتمال رد کردن H_0 وقتی که در حقیقت H_0 نادرست باشد؛ یعنی:

$$(11-1) \quad 1 - \beta = 1 - (\text{احتمال وقوع خطای نوع دوم}) = 1 - \text{توان آزمون}$$

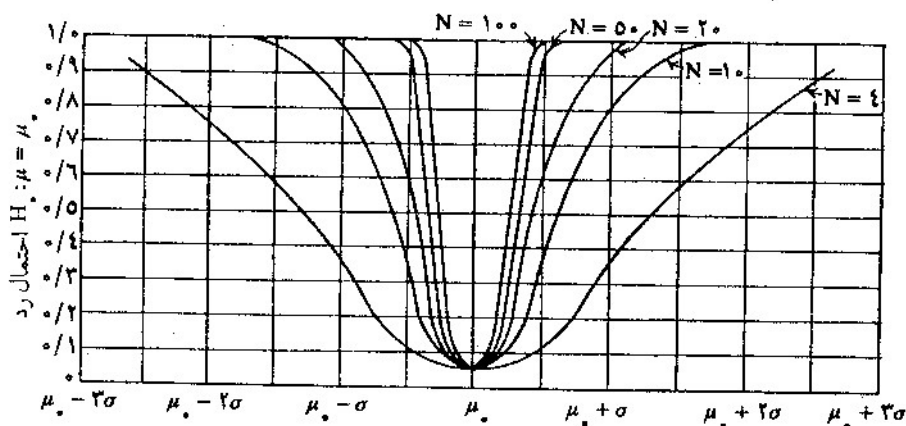


شکل ۱۱-۱ سه سطح معنی دار متفاوت

آنچه موجب کاهش خطای نوع اول و دوم و همچنین موجب افزایش توان آزمون می شود، افزایش حجم نمونه است.

منحنیهای شکل ۱۱-۲ نشان می دهند که وقتی حجم نمونه (n) افزایش می یابد احتمال وقوع خطای نوع دوم (β) کاهش می یابد. در این شکل افزایش توان آزمون دو دنباله (دو طرفه) میانگین وقتی که حجم نمونه افزایش می یابد با یکدیگر مقایسه شده است. مشاهده می شود وقتی حجم نمونه از ۴ به ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ افزایش می یابد چگونه توان آزمون نیز زیادتر می شود. این نمونه ها از جامعه ای نرمال انتخاب شده اند که واریانس آن σ_x^2 است.

شکل ۱۱-۲ همچنین نشان می‌دهد که وقتی H_0 درست است - یعنی وقتی میانگین واقعی با μ مساوی است - احتمال رد کردن H_0 مساوی ۵ درصد خواهد بود. این مسأله طبیعی است، چون $\alpha = ۰/۰۵$ است و α نشان دهنده احتمال رد کردن H_0 است وقتی که در حقیقت H_0 درست باشد.



شکل ۱۱-۲ منحنیهای توان یک آزمون دو دنباله در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ با نمونه‌های متعدد

۱۱-۴ توزیع نمونه‌گیری آماره

همانند تخمین آماری در تحقیقات استنباطی، صحت یک فرضیه آماری تنها با استفاده از نمونه‌ای n تایی از جامعه آماری و توزیع نمونه‌گیری آماره مشخص می‌شود. چنانکه در بحث تخمین، پارامتر مجهول با استفاده از توزیع نمونه‌گیری آماره برآورد می‌شد، در بحث آزمون فرض نیز تأیید یا رد فرض صفر (H_0) به توزیع نمونه‌گیری آماره بستگی دارد. واضح است که توزیع آماره متأثر از توزیع جامعه و شرایط تخمین و همچنین حجم نمونه است؛ بنابراین در این قسمت برای تعیین نوع توزیع نمونه‌گیری به شرایط تخمین رجوع و براساس شرایط تخمین توزیع نمونه‌گیری مشخص می‌شود. جدول ۱۱-۲ نشان‌دهنده توزیعهای نمونه‌گیری مورد استفاده در این فصل است که برحسب نوع آزمون استفاده می‌شوند.

جدول ۱۱-۲ نشان می‌دهد که از چه توزیعهایی برای آزمون هر پارامتر استفاده خواهد شد. متغیرهای استاندارد مورد استفاده به کمک توزیع نمونه‌گیری تعریف

می‌شوند. اصطلاح «آماره آزمون»^۱ که در این فصل از آن نام برده می‌شود، همان متغیر استاندارد فصل دهم است که این بار با پارامتر مورد آزمون تعریف می‌شود.

جدول ۱۱-۲ توزیع نمونه‌گیری آماره و آماره آزمون

پارامتر فرضیه پژوهشی	نماد آماری فرضیه	آماره	توزیع نمونه‌گیری	آماره آزمون (متغیر استاندارد)
میانگین جامعه	μ_0	$\bar{X}$	نرمال یا t استیودنت	Z یا t
مقایسه میانگین دو جامعه	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	نرمال یا t استیودنت	Z یا t
نسبت موفقیت جامعه	p_0	$\bar{p}$	نرمال	Z
مقایسه موفقیت در دو جامعه	$p_1 - p_2$	$\bar{p}_1 - \bar{p}_2$	نرمال	Z
واریانس جامعه	σ_0^2	S_x^2	کای - مربع	χ^2
مقایسه واریانس دو جامعه	σ_1^2 / σ_2^2	S_1^2 / S_2^2	فیشر	F

۱۱-۵ آزمون فرض یک دنباله و دو دنباله

براساس آنچه گذشت نتیجه می‌گیریم که H_0 را باید پذیرفت مگر آنکه دلیل محکمی بر رد آن وجود داشته باشد. این بدین معناست که فرض صفر همیشه دربرگیرنده سطح اطمینان $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد است؛ بنابراین H_1 دربرگیرنده سطح معنی‌دار α است. مفهوم کاربردی این گفته آن است که پذیرش یا رد H_0 با سطح اطمینان دلخواه صورت خواهد گرفت. پس همیشه H_1 به اندازه α در دنباله(های) توزیع نمونه‌گیری تعریف خواهد شد. یک دنباله^۲ یا دو دنباله^۳ بودن آزمون فرض آماری به تعریف H_1 و H_0 بستگی دارد. این تعاریف با مثالهای ۱۱-۱ تا ۱۱-۳ تشریح می‌شوند.

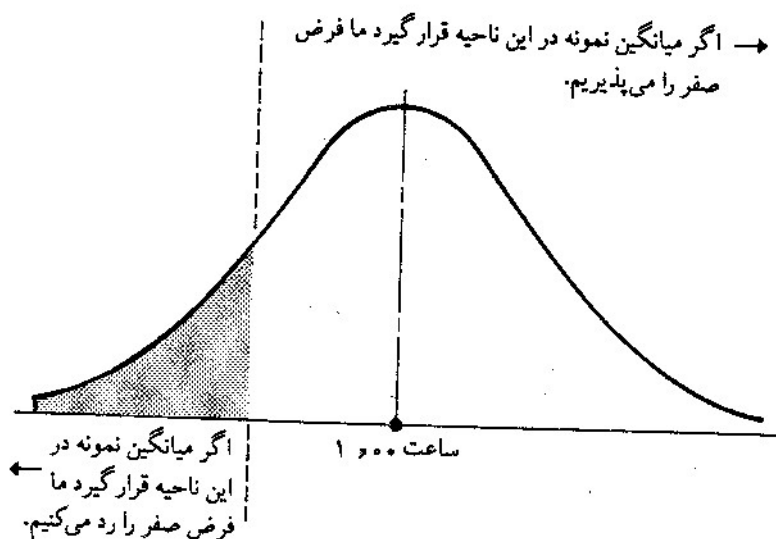
مثال ۱۱-۱ در فرضیه‌ای پژوهشی چنین آمده است: «میانگین دستمزد کارگران یک کارخانه صنعتی کمتر از ۲۰ هزار تومان است.»

فرضیه فوق طوری به فرضیه‌های آماری تبدیل می‌شود که H_0 نشان‌دهنده

نقیض ادعا و H_1 نشان دهنده فرضیه پژوهشی باشد، به این صورت:

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \geq 20 & \text{نقیض ادعا:} \\ H_1: \mu_x < 20 & \text{ادعا:} \end{cases}$$

واضح است که H_1 به اندازه α در دنباله چپ توزیع نمونه گیری $\bar{X}$ تعریف خواهد شد. این نوع آزمون را «آزمون یک دنباله چپ» می خوانند و متحنی آن در شکل ۱۱-۳ دیده می شود:

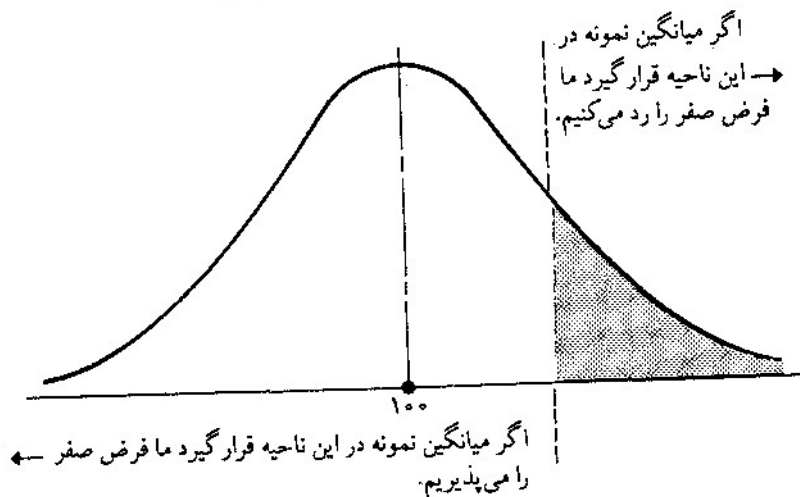


شکل ۱۱-۳ آزمون یک دنباله چپ

مثال ۱۱-۲ فرضیه ای پژوهشی به این صورت تدوین شده است: «حداکثر، ۱۰ درصد محصولات کارخانه «الف» معیوب هستند.»
با تبدیل فرضیه پژوهشی به نقیض آن مشخص می شود که ادعا در H_0 و نقیض آن در H_1 قرار می گیرد؛ به این صورت:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 0.10 & \text{ادعا:} \\ H_1: p > 0.10 & \text{نقیض ادعا:} \end{cases}$$

در این نوع آزمون، H_1 به اندازه α در دنباله راست توزیع نمونه گیری $\bar{P}$ تعریف می شود. منحنی این آزمون در شکل ۱۱-۴ آمده است. از آنجا که H_1 در دنباله راست تعریف شده است، این نوع آزمون را «آزمون یک دنباله راست» می گویند.

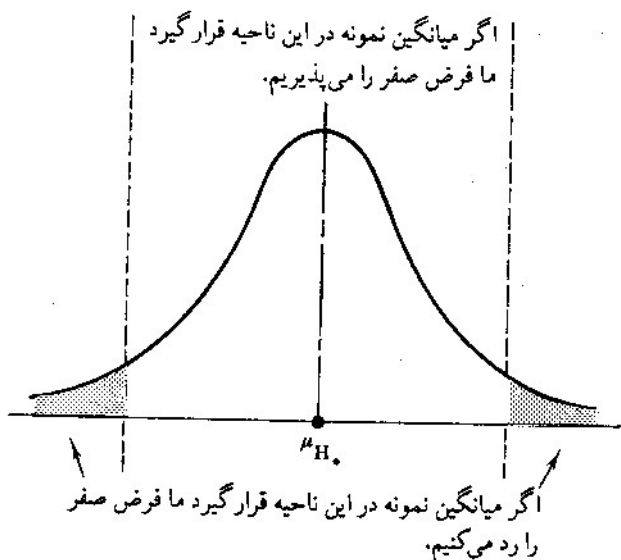


شکل ۱۱-۴ آزمون یک دنباله راست

مثال ۱۱-۳ فرضیه پژوهشی در این مثال عبارت است از: «میانگین نمره مسئولیت پذیری کارمندان مرد با نمره مسئولیت پذیری کارمندان زن تفاوتی ندارد.» فرضیه های آماری عبارت فوق چنین است:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 & \text{ادعا} \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 & \text{تقیض ادعا} \end{cases}$$

فرض آماری H_1 باید به اندازه $\alpha = 10\%$ درصد در دنباله های توزیع $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ تعریف شود. چون قید مخالف بین μ_1 و μ_2 در H_1 دیده می شود. پس H_1 به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ در دنباله راست و به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ در دنباله چپ قرار می گیرد. دنباله چپ نشان دهنده $\mu_1 - \mu_2 < 0$ و دنباله راست نشان دهنده $\mu_1 - \mu_2 > 0$ خواهد بود. طبیعی است H_0 نیز نشان دهنده $\mu_1 = \mu_2$ است. منحنی این نوع فرضیه ها (فرضیه هایی با قید تساوی مطلق در H_0) در شکل ۱۱-۵ دیده می شود. چنین فرضیه هایی را آزمون دو دنباله (دو طرفه) می گویند.



شکل ۱۱.۵ آزمون دو دنباله

۱۱-۶ مراحل عمومی آزمون فرض آماری

از جمع‌بندی مبانی آزمون فرض که بیان شد می‌توان برای تمامی آزمون فرضهای آماری، مراحل چهارگانه ذیل را تدوین کرد. این رویه تا آخر کتاب برای انجام دادن هر آزمونی اعمال خواهد شد.

مرحله اول. تعریف فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 (فرضها): براساس قاعده‌ای که بیان شد، چنانچه فرضیه پژوهشی مرز مشخصی (=) داشته باشد، H_0 نشان‌دهنده ادعا (فرضیه پژوهشی) خواهد بود؛ در غیر این صورت نقیض آن در H_1 تعریف شده و فرضیه پژوهشی در قالب نماد آماری در H_1 قرار خواهد گرفت. آن چه مسلم است فرض H_0 و H_1 مکمل یکدیگر هستند. با این توصیف H_1 گاهی بیان‌کننده ادعا و گاهی نقیض ادعا خواهد بود.

مرحله دوم. تعیین توزیع نمونه‌گیری آماره و نوع آماره آزمون (آماره آزمون): توزیع نمونه‌گیری به شرایط تخمین پارامتر مورد ادعا بستگی دارد. بسته به اینکه فرضیه پژوهشی چه نوع پارامتری را بیان می‌کند، توزیع نمونه‌گیری آماره و آماره آزمون تغییر خواهد کرد. آماره آزمون، همان متغیر استاندارد است که در بحث تخمین برای استخراج فواصل اطمینان از آن استفاده می‌شد، با این تفاوت که تمام اجزای آن در بحث آزمون معلوم خواهد بود. آماره آزمون از جدول ۱۱-۲ برحسب ضرورت استخراج خواهد شد.

مرحله سوم. تعیین سطح زیر منحنی H_1 و H_2 و محاسبه مقدار بحرانی (مقدار بحرانی): سطح زیر منحنی H_1 و H_2 به توزیع نمونه گیری و مقدار α بستگی دارد. یک دنباله یا دو دنباله بودن آزمون نیز بر سطح زیر منحنی فرضیه های آماری تأثیر مستقیم دارد. چنانکه بیان شده قاعده این است: « H_2 دربرگیرنده سطح اطمینان و H_1 سطحی برابر α خواهد داشت.»

محاسبه مقدار استاندارد که تفکیک کننده H_1 و H_2 به صورت عددی باشد از دیگر موارد ضروری در این مرحله است. مقدار استاندارد براساس نوع آزمون و مقدار α از جداول آماری موجود (پیوست کتاب) استخراج می شود. این مقدار با توجه به علامت آن، «مقدار بحرانی»^۱ نامیده می شود. مقدار استاندارد و جدول آماری مورد نیاز برای استخراج آن براساس آماره آزمون تعیین می شود؛ برای مثال اگر آماره آزمون از نوع Z باشد، مقدار بحرانی براساس جدول استاندارد Z تعیین می شود و اگر از نوع کای - مربع باشد، براساس جدول χ^2 تعریف می شود.

مرحله چهارم. تصمیم گیری: در این مرحله مقدار آماره آزمون محاسبه شده در مرحله دوم با مقدار بحرانی مرحله سوم مقایسه می شود. چنانچه آماره آزمون در ناحیه پذیرش H_2 قرار گیرد، گفته می شود که در سطح اطمینان مورد نظر، دلیل کافی برای پذیرش H_2 وجود دارد. در غیر این صورت فرض H_2 رد شده و H_1 در سطح خطای α درصد پذیرفته می شود.

تبدیل تصمیم گیری آماری به تصمیم گیری مدیریتی از دیگر موارد ضروری در این مرحله است. پس از تأیید یا رد H_2 ، تحلیلگر باید به طور مشخص بیان کند که آیا فرضیه پژوهشی پذیرفته یا رد شده است. بدیهی است محقق هیچ گاه ادعای اثبات یا عدم اثبات فرضیه پژوهشی یا فرضیه های آماری را ندارد، بلکه در تحلیل خود به لحاظ استقرا رعایت احتیاط را خواهد کرد.

تمرین

۱. رابطه بین سطح معنی دار و خطای نوع اول چیست؟
۲. رابطه بین خطای نوع اول و توان آزمون را بیان کنید.
۳. تفاوت آزمونهای یک دنباله با دو دنباله را ذکر کنید.

۴. این فرضیه پژوهشی را در نظر بگیرید: «درصد رضایت شغلی در سازمانهای دولتی کمتر از سازمانهای خصوصی است.» و فرضیه‌های آماری آن را بیان کنید.
۵. آیا بیان اثبات فرضیه‌های آماری صحیح است؟ چرا؟

۱۱-۷ آزمون فرض آماری میانگین یک جامعه (μ_x)

اگر فرضیه‌ای در خصوص میانگین یک جامعه آماری طراحی شود با استفاده از مراحل آزمون فرض آماری می‌توان صحت یا سقم فرضیه را در سطح معنی‌دار α تعیین کرد. مراحل چهارگانه آزمون فرض آماری برای μ_x به شرح ذیل است.

۱. فرضها: براساس قواعد بیان شده، فرضیه‌های آماری برای میانگین جامعه، صرف نظر از فرضیه پژوهشی یکی از این تعاریف را خواهد داشت:

$$1) \begin{cases} H_0: \mu_x \leq \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} H_0: \mu_x \geq \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \neq \mu_0 \end{cases}$$

در رابطه‌های فوق H_0 ممکن است نشان‌دهنده ادعا و یا نقیض ادعا باشد. همچنین μ_0 همان میانگین مورد آزمون است.

۲. آماره آزمون: توزیع $\bar{X}$ براساس شرایط تخمین، یکی از توزیعهای Z یا t را خواهد داشت. حال براساس هریک از حالت‌های تخمین μ_x ، آماره آزمون به این شرح تعریف می‌شود:

۱. وقتی که نمونه از جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شود، توزیع $\bar{X}$ صرف نظر از حجم نمونه نرمال است و در نتیجه آماره آزمون، Z خواهد بود که چنین تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \quad (11-2)$$

۲. هرگاه نمونه از جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شود، توزیع نمونه‌گیری $\bar{X}$ براساس حجم نمونه به این شرح تعیین می‌شود:

الف) اگر حجم نمونه کوچک باشد ($n \leq 30$)، توزیع $\bar{X}$ از t استیودنت برخوردار است و آماره آزمون عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \quad (11-3)$$

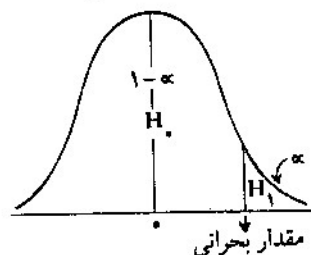
ب) در صورتی که حجم نمونه بزرگ باشد ($n > 30$)، توزیع $\bar{X}$ براساس قضیه حد مرکزی از تقریب نرمال برخوردار است و آماره آزمون آن عبارت است از:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \quad (11-4)$$

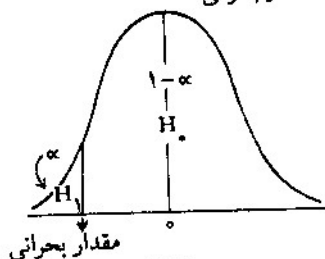
در این حالت همچنین می توان براساس تعریف رابطه Z و t از رابطه ۱۱-۳ نیز استفاده کرد.

۳. مقدار بحرانی: در این مرحله محقق پس از تعیین مقدار α و سطح اطمینان، آزمون خود را از نظر یک دنباله و دو دنباله بودن مشخص خواهد کرد. اگرچه نوع آزمون براساس حالت های مرحله اول تعریف می شود، ولی تعیین مقدار بحرانی (H_1 و H_0) براساس α و نوع آماره آزمون صورت می گیرد که از جدول مربوطه در پیوست کتاب استخراج می شود. برای وضوح بیشتر هریک از تعاریف مرحله اول را به صورت منحنی در شکل ۱۱-۶ نمایش خواهیم داد.

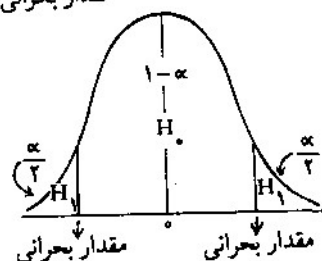
$$۱) \begin{cases} H_0: \mu_x \leq \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases}$$



$$۲) \begin{cases} H_0: \mu_x \geq \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases}$$



$$۳) \begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \neq \mu_0 \end{cases}$$



شکل ۱۱-۶ آزمون یک دنباله و دو دنباله و سطح زیر منحنی H_1 و H_0

حالت اول را آزمون یک دنباله راست و حالت دوم را آزمون یک دنباله چپ و حالت سوم را چنانکه از منحنی آن پیداست دو دنباله می‌گویند. مقادیر بحرانی نیز بر حسب توزیع $\bar{X}$ و نوع آماره آزمون یا از جدول Z و یا از جدول t استیودنت استخراج می‌شوند.

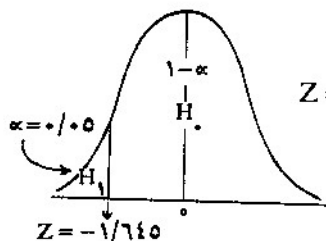
۴. تصمیم‌گیری: در این مرحله مقدار آماره آزمون محاسبه شده با مقدار بحرانی مرحله سوم مقایسه می‌شود. اگر آماره آزمون در ناحیه پذیرش H_0 قرار گیرد، فرض H_0 در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ درصد پذیرفته می‌شود. در غیر این صورت داده‌های نمونه دلیل محکمی بر تأیید H_0 ارائه نداده و آن را رد می‌کنند.

مثال ۱۱-۴ فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «میانگین نمره مسئولیت‌پذیری مدیران در کشور دست کم ۵۰ است.» محقق برای بررسی فرضیه فوق یک نمونه ۶۴ تایی از بین مدیران کشور به طور تصادفی انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۴۵ و ۱۶ است. در سطح خطای ۵ درصد صحت قضیه فوق را بررسی کنید.

براساس مراحل اول و دوم مشخص می‌شود که آزمون از نوع یک دنباله چپ است که آماره آزمون آن براساس رابطه ۱۱-۴ تعریف می‌شود؛ بنابراین فرضیه‌های آماری و سطح زیر منحنی آنها در سطح خطای ۵ درصد به این ترتیب است:

$$H_0: \mu_x \geq 50 \quad \text{فرضیه ۱.}$$

$$H_1: \mu_x < 50$$



$$2. \text{آماره آزمون: } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} = \frac{45 - 50}{\frac{16}{\sqrt{64}}} = -2/5$$

$$3. \text{مقادیر بحرانی: } Z_{\alpha} = Z_{0.05} = -1/645$$

۴. تصمیم‌گیری: پس از مقایسه آماره آزمون با مقدار بحرانی مشخص می‌شود که آماره آزمون در ناحیه H_1 قرار می‌گیرد؛ بنابراین در سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت که مشاهدات دلالت کافی بر تأیید H_1 ندارد. از آنجا که فرض H_0 بیان‌کننده فرضیه پژوهشی است پس در سطح خطای ۵ درصد می‌توان گفت فرضیه پژوهشی

رد می‌شود و نقیض آن؛ یعنی «میانگین نمره مسئولیت‌پذیری مدیران در کشور کمتر از ۵۰ است» پذیرفته می‌شود.

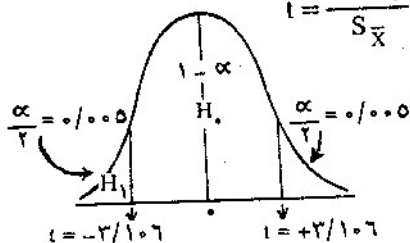
مثال ۱۱-۵ فرضیه‌ای به این صورت توسط یک دانشجوی مدیریت طراحی شده است: «میانگین مهارت ادراکی مدیران سازمان «الف» ۵۵ است.» به منظور بررسی فرضیه فوق، دانشجو از بین مدیران سازمان «الف» یک نمونه تصادفی ۱۲ نفره انتخاب کرده که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب ۶۰ و ۱۵ است. فرض کنید توزیع امتیاز مهارت ادراکی مدیران سازمان «الف» نرمال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد صحت فرضیه فوق را بررسی کنید.

براساس مرحله اول و دوم آزمون فرض، مشخص می‌شود که آزمون، دو دنباله بوده و آماره آزمون براساس رابطه ۱۱-۳ تعریف می‌شود. همچنین مقدار بحرانی در سطح خطای $(\alpha = 0.005)$ از جدول ۱ استیودنت استخراج می‌شود؛ بنابراین:

۱. فرضها: $H_0: \mu_x = 55$

$H_1: \mu_x \neq 55$

۲. آماره آزمون: $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} = \frac{60 - 55}{\frac{15}{\sqrt{12}}} = 1/150$



۳. مقادیر بحرانی: $\pm 3/106 = \pm 0.005, 11$

۴. تصمیم‌گیری: چون آماره آزمون $(t = 1/150)$ در ناحیه H_0 قرار گرفته است

پس فرض صفر در سطح اطمینان ۹۹ درصد پذیرفته می‌شود؛ بنابراین فرضیه پژوهشی دانشجو که به طور مستقیم در H_0 قرار گرفته است تأیید می‌شود.

تمرین

۱. ادعا شده است که میانگین برق مصرفی فروردین ماه یک ناحیه بزرگ تهران دست کم ۱۳۰۰ کیلووات ساعت بوده است. بدین منظور یک نمونه تصادفی به تعداد ۴۰۰ خانوار از منطقه انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار برق مصرفی آنها به ترتیب ۱۲۵۲ و ۲۵۷ کیلووات

ساعت است. سطح خطای یک درصد را در نظر گرفته و صحت ادعا را بررسی کنید.

۲. ادعا شده که میانگین زمان تأخیر هواپیماهای مسافربری فرودگاه مهرآباد برای فرود بر روی باند، ۳ دقیقه است. در این زمینه ۷ پرواز به طور تصادفی انتخاب شده که تأخیر آنها برای فرود به این ترتیب است:

$$x_i: 1/5, 2, 2/5, 3, 5, 4, 4/5 \quad (\text{زمان بر حسب دقیقه})$$

- توزیع زمان تأخیر برای فرود بر روی باند نرمال است. ادعای فوق را در سطح خطای یک درصد محاسبه کنید.
۳. حسابرسی ادعا کرده که میانگین مانده حسابهای بدهکاران شرکت «ب» ۴۵۰ هزار تومان است. به منظور بررسی این ادعا یک نمونه ۱۰ تایی از حسابهای بدهکاران شرکت انتخاب شده که میانگین آن ۴۰۰ هزار تومان و انحراف معیارش ۲۰ هزار تومان است. توزیع مانده حسابهای بدهکاران شرکت نرمال است. محاسبه کنید آیا می توان ادعا را در سطح خطای ۵ درصد پذیرفت؟
۴. در فرضیه‌ای چنین بیان شده است: «میانگین بلوغ روانی کارمندان سازمان «الف» حداکثر ۶۰ است.» برای بررسی فرضیه فوق یک نمونه تصادفی ۸۱ نفره از بین کارمندان سازمان «الف» انتخاب شده که از نظر بلوغ روانی امتحان شده‌اند. میانگین بلوغ روانی آنها ۶۸ و انحراف معیار نمونه امتحان ۲۰ شده است. سطح خطای ۲ درصد را در نظر گرفته و فرضیه پژوهشی را آزمون کنید.

۸-۱۱ آزمون مقایسه میانگین دو جامعه آماری

بخش اعظم فرضیه‌های پژوهشی در مدیریت و علوم رفتاری به منظور مقایسه دو جامعه آماری انجام می‌گیرند. این نوع فرضیه‌ها را «فرضیه‌های تطبیقی»^۱ گویند. برای آزمون این نوع فرضیه‌ها (چنانچه میانگین‌پذیر باشند) و تعیین صحت و سقم آنها می‌توان از مراحل آزمون فرض آماری برای میانگین دو جامعه استفاده کرد. مراحل آزمون به ترتیب شرح داده می‌شود.

۱. فرضها: فرضیه‌های آماری، برگرفته از فرضیه پژوهشی و نقیض آن هستند. با توجه به فرضیه پژوهشی و نقیض آن، فرضیه‌های آماری یکی از این تعاریف را خواهند داشت:

$$۱) \begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \quad ۲) \begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad ۳) \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

۲. آماره آزمون: به خاطر داریم که $\mu_1 - \mu_2$ از آماره نااریب $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ برخوردار است. توزیع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ به شرایط تخمین تفاضل میانگین دو جامعه بستگی دارد که به این صورت تفکیک پذیر است:

۱. وقتی نمونه‌ها از دو جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم انتخاب شوند، توزیع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ نرمال بوده و آماره آزمون عبارت است از:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (۱۱-۵)$$

۲. وقتی نمونه‌ها از دو جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شوند، توزیع نمونه‌گیری آماره به $n_1 + n_2 - 2$ به شرح ذیل بستگی خواهد داشت.
الف) اگر درجه آزادی کوچکتر از ۳۰ باشد، توزیع نمونه‌گیری آماره استیودنت است. خطای استاندارد در این حالت تحت تأثیر فرض تساوی و عدم تساوی واریانس دو جامعه متفاوت خواهد بود. به طوری که اگر $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ باشد، آماره آزمون عبارت است از:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (۱۱-۶)$$

توزیع t در این حالت دارای درجه آزادی $n_1 + n_2 - 2$ d.f خواهد بود. S_p همان واریانس مشترک است که در قسمت ۱۰-۳-۲ تعریف شد.

اگر فرض $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ پذیرفته شود؛ درجه آزادی براساس رابطه ۱۱-۷ و آماره آزمون براساس رابطه ۱۱-۸ تعریف می‌شود.

$$d.f' = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} \quad (11.7)$$

$$t' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad (11.8)$$

ب) اگر درجه آزادی بزرگتر از ۳۰ باشد، آماره آزمون چنین تعریف می شود:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad (11.9)$$

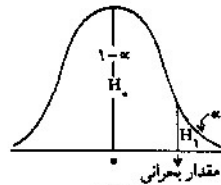
براساس قضیه حد مرکزی در نمونه های بزرگ تقریب $Z \approx t$ برقرار است؛ بنابراین می توان از هریک از رابطه های ۱۱-۶ و ۱۱-۸ به جای رابطه ۱۱-۹ استفاده کرد.

۳. مقدار بحرانی: سطح زیر منحنی بر حسب نوع آزمون، α و توزیع نمونه گیری $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ تعریف می شود؛ بنابراین برحسب فرضیه های آماری در مرحله اول، سطح زیر منحنی در حالت های مختلف به شکل ۱۱-۷ خواهد بود.

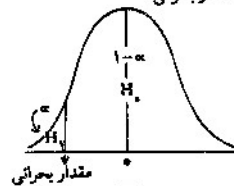
حالت های اول و دوم از نوع آزمونهای یک دنباله و حالت سوم آزمون دو دنباله است. مقدار بحرانی براساس آماره آزمون و مقدار α از جدول t یا Z استخراج خواهد شد.

۴. تصمیم گیری: مقایسه مقدار بحرانی و آماره آزمون مشخص خواهد کرد که آیا H_0 تأیید یا رد می شود. چنانچه آماره آزمون در ناحیه H_0 قرار گیرد، H_0 در سطح اطمینان دلخواه تأیید شده، در غیر این صورت رد می گردد. پس از تأیید یا رد H_0 ، محقق به تبیین رد یا تأیید فرضیه پژوهشی خود خواهد پرداخت.

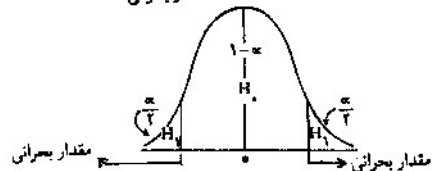
$$۱) \begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$



$$۲) \begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$



$$۳) \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$



شکل ۱۱.۷ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در سطح خطای α

مثال ۱۱-۶ تحقیقی برای مقایسهٔ روش آموزش متمرکز مدیران با روش غیرمتمرکز آنان در دست برنامه‌ریزی است؛ بدین منظور فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «روش آموزش متمرکز برای مدیران بهتر از روش غیرمتمرکز است.» ملاک سنجش فرضیهٔ فوق مقایسهٔ میانگین نمره‌های مدیرانی است که به روش متمرکز و غیرمتمرکز آموزش دیده‌اند. چون به تمام مدیران آموزش دیده دسترسی نبوده، به نمونه‌هایی از هر گروه اکتفا شده است. بررسیها نشان می‌دهد که توزیع نمره‌ها در هر دسته نرمال است. اطلاعات حاصل از نمونه‌ها به این شرح است:

روش متمرکز	روش غیرمتمرکز
$n_1 = ۱۰$	$n_2 = ۱۵$
$\bar{X}_1 = ۵۲$	$\bar{X}_2 = ۴۵$
$S_1 = ۱۲$	$S_2 = ۸$

فرض تساوی واریانس دو جامعه را پذیرفته و صحت فرضیه را در سطح خطای یک درصد محاسبه کنید.

براساس مراحل اول تا سوم مشخص می‌شود که توزیع نمونه‌گیری آماره، t استیودنت است و چون واریانس نمره‌ها در دو سیستم آموزش مساوی است، پس آمارهٔ آزمون براساس رابطهٔ ۱۱-۶ تعریف خواهد شد. همچنین آزمون، یک آزمون یک دنباله است که تبیین آماری و منحنی آن به این شرح است:

۱. فرضها:

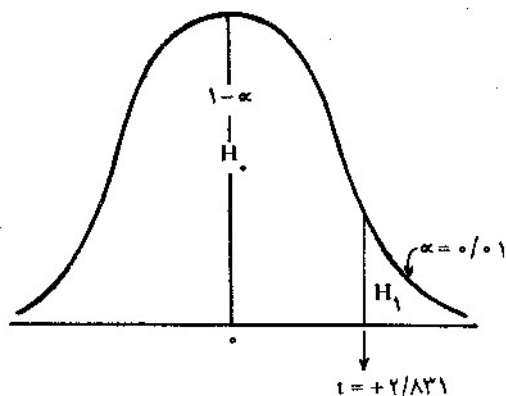
$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ (از نظر اثر بخشی روش آموزش متمرکز بهتر از روش غیر متمرکز نیست.)

$H_1: \mu_1 > \mu_2$ (از نظر اثر بخشی روش آموزش متمرکز بهتر از روش غیر متمرکز است.)

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)(12)^2 + (10-1)(8)^2}{10+10-2}} = 9.762$$

$$t = \frac{(52-45) - 0}{9.762 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 1.757 \quad \text{آماره آزمون: } 1.757$$

۳. مقادیر بحرانی: $t_{\alpha, df} = t_{0.01, 22} = 2.831$



۴. تصمیم‌گیری: آماره آزمون $(t = 1.757)$ در مقایسه با مقدار بحرانی

$(t = 2.831)$ در ناحیه H_0 قرار می‌گیرد؛ بنابراین، فرض H_0 در سطح خطای یک درصد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیه پژوهشی تحقیق، رد شده و نقیض آن تأیید می‌گردد. چون H_0 نشان‌دهنده نقیض ادعا و H_1 نشان‌دهنده فرضیه پژوهشی (ادعا) است.

۱۱-۹ آزمون مقایسه زوجها

در بخش ۱۱-۸ فرض اساسی این بود که میانگینها و نمونه‌های هر گروه مستقل از یکدیگر

هستند. روشی که برای ارزشیابی پیش آزمون^۱ و پس آزمون^۱ به کار می رود، روشی است که در آن از مشاهدات مربوط به نمونه های غیر مستقل استفاده می کنند. آزمون فرضیه ای که بر مبنای این نوع داده ها قرار دارد به «آزمون مقایسه زوجها»^۲ معروف است. بسیار اتفاق می افتد که تفاوت واقعی بین دو جامعه نسبت به متغیر مورد نظر وجود ندارد، ولی وجود منابع خارجی پراکندگی ممکن است سبب رد فرضیه H_0 بشود. از طرف دیگر ممکن است تفاوت های واقعی با وجود عوامل خارجی پوشیده گردد. هدف از آزمون مقایسه زوجها این است که با تشکیل زوجهای شبیه به هم نسبت به متغیر مورد نظر حداکثر تعداد منابع خارجی پراکندگی را تا آنجا که امکان دارد از بین برد. در این گونه موارد به جای آنکه تجزیه و تحلیل را به کمک مشاهدات فردی انجام دهیم، تفاوت بین زوج مشاهدات فردی را به عنوان متغیر مورد بررسی به کار می بریم. ساختار ذیل نشان دهنده مشاهدات در یک مقایسه زوجی است که در آن X و Y به ترتیب نمایشگر پاسخهای رفتار^۱ و ۲ هستند. تفاضل بین پاسخها در هر زوج در ستون آخر ثبت شده است. در این نوع آزمون، رفتار ۲ را همیشه y و رفتار ۱ را x می دانیم و d_i (تفاضل) نیز همیشه با $y_i - x_i$ بیان می شود.

جدول ۱۱.۳ ساختار آزمون مقایسه زوجها

زوج	رفتار ۱ (x_i)	رفتار ۲ (y_i)	تفاضل $d_i = y_i - x_i$
۱	x_1	y_1	$d_1 = y_1 - x_1$
۲	x_2	y_2	$d_2 = y_2 - x_2$
۳	x_3	y_3	$d_3 = y_3 - x_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n	$d_n = y_n - x_n$

مفروضات آزمون زوجها عبارتند از:
الف) هر زوج (y_i و x_i) مستقل از زوج دیگری است.

ب) متغیر مورد مطالعه از مقیاس نسبی یا فاصله‌ای برخوردار است.

ج) توزیع تفاوتها در جامعه مشاهدات دوتایی همبسته، نرمال یا از تقریب نرمال برخوردار است.

ستون d نشان‌دهنده نمونه زوجی n تایی است که به نوعی $\text{Cov}(X, Y)$ را در خود دارد. حال آزمون مناسب را همانند مراحل آزمون μ_x می‌توان به عمل آورد. با این تفاوت که در این بخش آماره‌ها و پارامترها از نماد d برخوردارند. جدول ۱۱-۴ به معرفی آماره‌ها و پارامترهای مورد نیاز برای این آزمون خاص می‌پردازد.

جدول ۱۱-۴ معرفی آماره‌ها و پارامترهای آزمون مقایسه زوجها

پارامتر	آماره
$\mu_d = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N}$	$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$
$\sigma_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (d_i - \mu_d)^2}{N}$	$S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$
$\sigma_d^2 = \frac{\sigma_d^2}{n}$	$S_d^2 = \frac{S_d^2}{n}$

آماره آزمون از نوع t است که با فرض مجهول بودن σ_d عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{S_{\bar{d}}} \quad (11-10)$$

در این بخش از ذکر مراحل چهارگانه آزمون فرض به دلیل شباهت آن با آزمون μ_x خودداری کرده، با ذکر مثال آن را شرح می‌دهیم. نکته قابل توجه در آماره آزمون این است که H_0 همیشه قید $\geq$ ، یا $=$ با صفر (عدم اختلاف میانگین زوجها) را خواهد داشت.

مثال ۱۱-۷ به منظور مقایسه جو سازمانی در وضعیت موجود و وضعیت مطلوب، فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «جو سازمانی موجود با جو سازمانی در وضعیت

مطلوب اختلاف نامناسبی دارد.» برای بررسی فرضیه از پنج مدیر سازمانی که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، خواسته شده است که ضمن ارزشگذاری وضع مطلوب جو سازمانی برای سازمان، نمره وضع موجود جو سازمانی را نیز بیان کنند. خلاصه امتیازات حاصل از شاخصهای جو سازمانی در وضعیت مطلوب و موجود به این ترتیب است:

مدیر	۱	۲	۳	۴	۵
نمره وضع مطلوب (x_i)	۵۰	۵۹	۵۰	۵۸	۵۰
نمره وضع موجود (y_i)	۴۰	۵۷	۴۷	۵۰	۴۸

فرض نرمال بودن برای نمره‌های جو سازمانی در هر دو وضعیت پذیرفتنی است. صحت فرضیه پژوهشی را در سطح خطای ۵ درصد بررسی کنید.

۱. فرضها: اگر میانگین کل زوجهای جامعه آماری (که در اینجا نمره‌های کلیه مدیران است) کمتر از صفر باشد، می‌توان گفت بین جو سازمانی در وضع موجود با وضع مطلوب شکاف نامناسب وجود دارد؛ بنابراین فرضیه پژوهشی و نقیض آن به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} H_0: \mu_d \geq 0 & \text{نقیض ادعا:} \\ H_1: \mu_d < 0 & \text{ادعا:} \end{cases}$$

فرضیه پژوهشی به علت نداشتن تساوی در H_1 قرار گرفته و نقیض آن در H_0 آمده است.

۲. آماره آزمون: گفته شد که آماره $\bar{d}$ از توزیع t استودنت برخوردار است. در حالی که اگر σ_d برای نمره‌های زوجها مشخص باشد می‌توان از توزیع نرمال (متغیر استاندارد Z)، استفاده کرد. از آنجا که توزیع t هم برای $n < 30$ و هم برای $n \geq 30$ سازگار است، پس تنها آماره آزمون عبارت است از:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d}$$

حال به محاسبه اجزای آماره آزمون می‌پردازیم:

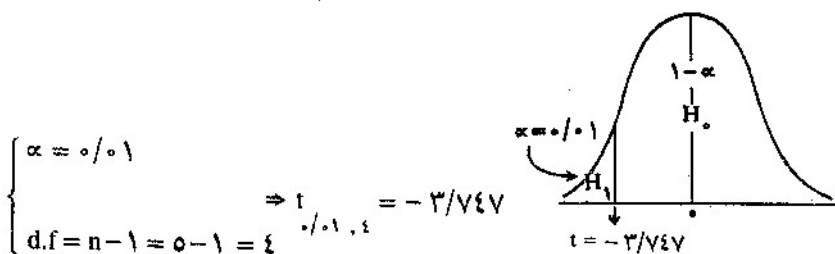
زوج	۱	۲	۳	۴	۵	
x_i	۵۰	۵۹	۵۰	۵۸	۵۰	
y_i	۴۰	۵۷	۴۷	۵۰	۴۸	
d_i	-۱۰	-۲	-۳	-۸	-۲	$\sum d_i = -۲۵$
$(d_i - \bar{d})^2$	۲۵	۹	۴	۹	۹	$\sum (d_i - \bar{d})^2 = ۵۶$

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-۲۵}{۵} = -۵$$

$$S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{۵۶}{۵-1} = ۱۴ \Rightarrow S_d = 3/\sqrt{14}$$

$$t = \frac{-۵}{\frac{3/\sqrt{14}}{\sqrt{۵}}} = -۲/۹۸۸ \text{ آماره آزمون}$$

۳. مقدار بحرانی: آزمون از نوع یک دنباله چپ است که با توجه به $\alpha = ۰/۰۱$ ،
منحنی آن به این صورت است:



مقدار بحرانی براساس جدول استیودنت با خطای یک درصد و درجه آزادی ۴ مساوی $-3/\sqrt{14}$ است.

۴. تصمیم‌گیری: آماره آزمون ($t = -۲/۹۸۸$) در مقایسه با مقدار بحرانی در ناحیه H_0 قرار می‌گیرد؛ بنابراین فرض H_0 در سطح خطای یک درصد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیه پژوهشی رد شده، نقیض آن تأیید می‌گردد.

تمرین

۱. در مطالعه حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ، نمونه‌های تصادفی مرکب از ۱۵۰ کارمند متخصص به طور مستقل از دو بخش مهندسی و حسابداری انتخاب شده‌اند. اطلاعات مربوط به حقوق این کارکنان به این صورت به دست آمده است:

بخش حسابداری	بخش مهندسی
$n_1 = 150$	$n_2 = 150$
$\bar{X}_1 = 27250$ تومان	$\bar{X}_2 = 39212$ تومان
$S_1 = 5041$ تومان	$S_2 = 5356$ تومان

سطح خطای ۲ درصد را در نظر گرفته، فرضیه ذیل را آزمون کنید: «بین میانگین حقوق کارمندان بخش حسابداری و مهندسی تفاوتی دیده نمی‌شود.»

۲. یک تحلیلگر عملیات می‌خواهد برای بهبود وضع مصرف بنزین، تفاضل میانگین طول عمر عاج لاستیک یک نوع تایر اتومبیل خاص را در حالتی که فشار باد تایر به صورت استاندارد و یا بیشتر از حد استاندارد است برآورد کند. دو نمونه مستقل، مرکب از ۱۵ تایر از خط تولید انتخاب کرده است. تایرهای نمونه اول را با فشار باد استاندارد و تایرهای نمونه دوم را با فشار باد بیش از حد استاندارد تنظیم و عمر عاج لاستیک تمام تایرها را آزمایش کرده است. نتایج عمر عاج لاستیک بر حسب هزار کیلومتر در زیر آمده است (حجم نمونه اول $n_1 = 14$ است؛ زیرا یکی از تایرها معیوب بوده و نتوانسته‌اند روی آن آزمایش مربوط را انجام دهند).

فشار باد زیاد	فشار باد استاندارد
$n_2 = 15$	$n_1 = 14$
$\bar{X}_2 = 40/7$	$\bar{X}_1 = 43$
$S_2 = 1/3$	$S_1 = 1/1$

فرض کنید هر دو جامعه توزیع نرمال با واریانس مساوی دارند.

الف) تفاوت میانگینهای عمر عاج لاستیک برای دو نوع فشار تایر، $\mu_1 - \mu_2$ ، را با استفاده از یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برآورد کرده، فاصله اطمینان حاصل را تفسیر کنید.
ب) آیا می‌توان با استفاده از آزمون فرض آماری نتایج بند الف را گرفت؟

۳. فرضیه تحقیقی چنین است: «در میان مدیران عالی به مهارت ادراکی بیشتر از مهارت فنی نیاز است.»

محقق برای بررسی فرضیه فوق ۱۰ مدیر را به طور تصادفی انتخاب کرده و از هر یک تست تعیین نیاز به مهارت ادراکی و فنی به عمل آورده است. نتایج در این جدول آمده است:

مدیر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
مهارت ادراکی	۸۰	۷۰	۷۵	۶۵	۸۲	۸۸	۶۷	۵۷	۹۰	۹۲
مهارت فنی	۵۰	۶۵	۷۰	۷۵	۸۰	۷۵	۶۶	۵۰	۸۰	۹۰

با فرض نرمال بودن توزیع نیاز در هر دو نوع مهارت، صحت فرضیه را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

۴. ادعا شده که یک برنامه ایمنی صنعتی در کاهش تسعیر ساعات کار ناشی از نقص در ماشینهای کارخانه مؤثر است. داده های زیر مربوط به ضایع شدن ساعت های کار هفتگی به واسطه نقص در ۶ دستگاه است که یکی قبل و دیگری بعد از اجرای برنامه ایمنی جمع آوری شده است:

دستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قبل	۱۲	۲۹	۱۶	۳۷	۲۸	۱۵
بعد	۱۰	۲۸	۱۷	۳۵	۲۵	۱۶

مفروضات لازم را بیان کرده، سپس تعیین کنید که آیا داده ها از ادعای فوق حمایت می کنند؟ چرا؟

۱۰-۱۱ آزمون فرض نسبت موفقیت در جامعه (p)

فرضیه های تحقیق در مدیریت گاهی نسبت پذیرند؛ فرضیه های مربوط به تحقیقات با مقیاس کیفی با استفاده از آزمون نسبت موفقیت مورد ادعا بررسی می شوند. چنانچه یک فرضیه پژوهشی با p بیان شود، می توان صحت آن فرضیه را با استفاده از مراحل چهارگانه آزمون فرض بررسی کرد. مراحل آزمون فرض p عبارتند از:

۱. فرضها: فرضیه های آماری با توجه به نوع فرضیه پژوهشی در قالب یکی از

این حالتها تبیین می شوند:

$$۱) \begin{cases} H_0: p \leq p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases} \quad ۲) \begin{cases} H_0: p \geq p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases} \quad ۳) \begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$$

چنانکه دیده می شود، قاعده بر خوردار بودن H_0 از تساوی در اینجا نیز برقرار است. در

این راستا، H_0 ممکن است بیان کننده فرضیه پژوهشی یا نقیض آن باشد.

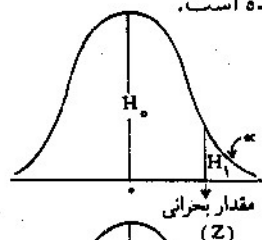
۲. آماره آزمون: براساس جدول ۱۱-۱ و تخمین گفته شد، آنچه در توزیع نمونه گیری $\bar{p}$ ، نرمال است و آماره آزمون به این صورت تعریف می شود:

$$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \quad (11-11)$$

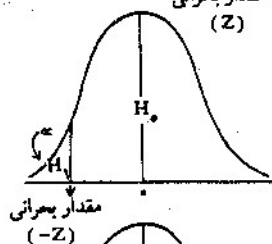
در رابطه فوق p_0 ، نسبت مورد آزمون و مخرج متغیر Z همان $\sigma_{\bar{p}}$ است.

۳. مقدار بحرانی: سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در توزیع نرمال تحت تأثیر فرضیه های آماری در مرحله اول است. سطح زیر منحنی بسته به نوع آزمون به صورت ذیل بین H_0 و H_1 تقسیم می شود. منتهی براساس دلایل بیان شده H_0 دربرگیرنده $(1-\alpha)$ درصد و H_1 سطحی برابر α درصد خواهد داشت. طبیعی است مقدار بحرانی باید از جدول استاندارد Z بر حسب مقدار α استخراج شود. علامت مقدار بحرانی به نوع آزمون (یک دنباله راست، یک دنباله چپ و دو دنباله) بستگی دارد. منحنی توضیحات فوق در شکل ۱۱-۸ آمده است.

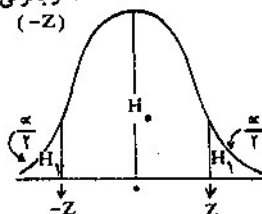
$$۱) \begin{cases} H_0 : p \leq p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$



$$۲) \begin{cases} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$



$$۳) \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$



شکل ۱۱-۸ تعیین سطح زیر منحنی H_0 و H_1 برای آزمون نسبت موفقیت جامعه

۴. تصمیم‌گیری: در این مرحله طبق معمول مقدار آمارهٔ آزمون که از رابطه ۱۱-۱۱ به دست آمده است با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود. چنانچه آمارهٔ آزمون در ناحیه H_0 قرار گیرد، گفته می‌شود که شواهد تجربی کافی در سطح اطمینان مورد نظر برای تأیید H_0 وجود دارد، در غیر این صورت فرض H_0 رد می‌شود.

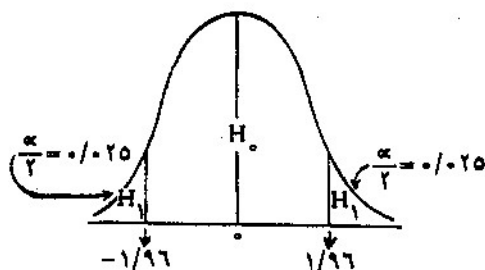
مثال ۸-۱۱ فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «شصت درصد مدیران کشور از سبک S_1 برخوردارند.» تحلیل‌گری برای بررسی فرضیه فوق یک نمونه ۲۰۰ تایی از بین مدیران کشور انتخاب کرده است که نیمی از آنها از سبک S_1 برخوردارند. در سطح خطای ۵ درصد صحت فرضیهٔ فوق را بررسی کنید.

با توجه به مراحل آزمون فرض p ، فرضیه‌های آماری، سطح زیرمنحنی فرضیه‌های آماری، آمارهٔ آزمون و مقدار بحرانی به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\begin{cases} \text{ادعا: } H_0: p = 60\% \\ \text{فرضها:} \\ \text{تقیض ادعا: } H_1: p \neq 60\% \end{cases}$$

$$Z = \frac{0/5 - 0/60}{\sqrt{0/60 \times 0/40}} = -2/89 \quad \text{۲. آمارهٔ آزمون}$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0/025} = \pm 1/96 \quad \text{۳. مقادیر بحرانی}$$



۴. تصمیم‌گیری: آمارهٔ آزمون $(Z = -2/89)$ در ناحیهٔ چپ H_1 قرار می‌گیرد؛ بنابراین در سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت که فرضیهٔ پژوهشی پذیرفته نمی‌شود. همچنین قرار گرفتن آمارهٔ آزمون در دنبالهٔ چپ H_1 نشان می‌دهد که نه تنها نسبت مدیران برخوردار از سبک S_1 مساوی ۶۰ درصد نیست بلکه کمتر از آن هم هست.

۱۱-۱۱ آزمون فرض مقایسه نسبت موفقیت در دو جامعه آماری

اگر فرضیه‌ای پژوهشی در خصوص مقایسه دو جامعه آماری با استفاده از داده‌های کیفی وجود داشته باشد می‌توان به مقایسه آن دو جامعه با استفاده از تفاضل نسبت موفقیت، پرداخت. صحت چنین فرضیه‌هایی با استفاده از آزمون مقایسه p_1 و p_2 امکانپذیر است.

مراحل چهارگانه آزمون مقایسه نسبتها، کاملاً شبیه بخش ۱۱-۱۰ است؛ بنابراین از ذکر جزئیات آن خودداری می‌شود. تنها تفاوت در تعریف آماره آزمون است. آماره آزمون از نوع Z است که به صورت رابطه ۱۱-۱۲ تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}} \quad (11-12)$$

واضح است که فرض H_0 بیان‌کننده $\leq$ ، $\geq$ یا $=$ است. پس براحتی می‌توان گفت که $p_1 - p_2$ مساوی صفر است؛ بنابراین گاهی در رابطه ۱۱-۱۲ عبارت $p_1 - p_2$ قید نمی‌شود و همچنین گاهی مخرج آماره آزمون براساس $\bar{p}$ مشترک دو نمونه تعریف می‌شود. $\bar{p}$ مشترک عبارت است از:

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \quad (11-13)$$

X_1 تعداد موفقیت در n_1 و X_2 تعداد موفقیت در n_2 است. حال می‌توان رابطه ۱۱-۱۲ را به صورت ۱۱-۱۴ نیز بیان کرد:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad (11-14)$$

مثال ۱۱-۹ فرضیه یکی از پایان‌نامه‌های مدیریت به این شرح است: «انگیزه توفیق‌طلبی در بین دانشجویان شهرستانی و تهرانی به یک اندازه است.» برای بررسی فرضیه فوق از هر گروه، نمونه‌هایی انتخاب شده که خلاصه اطلاعات آنها در جدول ذیل آمده است:

میزان توفیق طلبی	گروه دانشجویی	
	بالا	پایین
شهرستانی	۲۰۰	۱۰۰
تهرانی	۲۵۰	۱۵۰
		مجموع
		۳۰۰
		۴۰۰

در سطح خطای یک درصد صحت فرضیه فوق را بررسی کنید.

مقیاس توفیق طلبی یک مقیاس رتبه‌ای است؛ بنابراین یکی از پارامترهای مناسب برای بررسی چنین فرضیه‌ای استفاده از نسبت موفقیت است. چون بحث مقایسه دو جامعه آماری (شهرستانی و تهرانی) مطرح است؛ بنابراین از آزمون مقایسه p_1 و p_2 باید استفاده کرد. فرضیه‌های آماری، منحنی، آماره آزمون و مقدار بحرانی فرضیه فوق برای رسیدن به یک تصمیم معتبر به این ترتیب بیان می‌شود:

۱. فرضها:

$$H_0: p_1 = p_2 \quad \text{ادعا}$$

$$H_1: p_1 \neq p_2 \quad \text{نقیض ادعا}$$

۲. آماره آزمون:

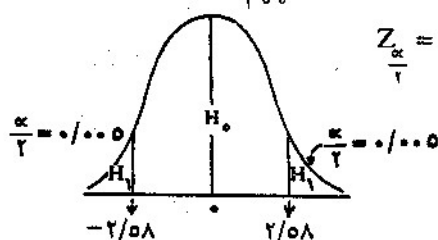
برای محاسبه $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ در رابطه ۱۱-۱۲ ما موفقیت را تعداد دانشجویان برخوردار از نگیزه توفیق طلبی بالا می‌دانیم؛ بنابراین داریم:

$$\bar{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{200}{300} = 0/667$$

$$\bar{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{250}{400} = 0/625$$

$$Z = \frac{(0/667 - 0/625)}{\sqrt{\frac{0/667(0/333)}{300} + \frac{0/625(0/375)}{400}}} = 1/104$$

۳. مقادیر بحرانی: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0/005} = \pm 2/58$



۴. تصمیم‌گیری: مقدار آماره آزمون ($Z = 1/154$) در ناحیه H_0 قرار می‌گیرد؛ بنابراین فرضیه پژوهشی در سطح خطای یک درصد تأیید می‌شود.

تمرین

۱. ادعا شده است که «سطح آمادگی کارمندان سازمان «الف» از کارمندان سازمان «ب» بالاتر است». برای بررسی این ادعا، از بین کارمندان سازمان «الف» یک نمونه ۱۰۰ تایی انتخاب شده است که ۶۰ نفر از آنها از سطح آمادگی بالا برخوردارند. در حالی که فقط نیمی از یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از کارمندان سازمان «ب» از سطح آمادگی بالا برخوردارند. در سطح خطای ۵ درصد صحت ادعای فوق را آزمون کنید.
۲. ادعا شده است که وضع بهداشتی خوابگاههای دانشجویی نامناسب است. بدین منظور یک نمونه تصادفی ۱۵۰ نفره از بین دانشجویان به طور تصادفی انتخاب شده است که ۵۰ نفر از آنها از وضع بهداشت خوابگاهها شکایت داشته‌اند. در سطح خطای ۲ درصد محاسبه کنید آیا می‌توان گفت ادعای فوق درست است؟
۳. در یک تحقیق هدف، مقایسه نظر واردکنندگان و صادرکنندگان کالا در خصوص مقررات گمرکی است. برای انجام این تحقیق پرسشنامه‌ای طراحی و به نمونه‌هایی از هر دو گروه داده شده است تا به سؤالات پاسخ دهند. ۸۰ نفر از یک نمونه ۱۰۰ تایی صادرکنندگان معتقدند که مقررات گمرکی دست و پاگیر است. در حالی که فقط ۷۰ نفر از ۱۰۰ نفر انتخاب شده از بین واردکنندگان چنین اعتقادی دارند. آیا می‌توان در سطح خطای ۵ درصد ادعا کرد که واردکنندگان و صادرکنندگان درباره مقررات گمرکی هم عقیده هستند؟ محاسبات لازم را انجام دهید.

۱۱-۱۲ آزمون فرض آماری برای واریانس جامعه

هرگاه فرضیه‌ای درباره پراکندگی جامعه وجود داشته باشد، صحت یا سقم آن را می‌توان با استفاده از مراحل آزمون فرض به شرح ذیل بررسی کرد.

۱. فرضها: براساس نوع فرضیه پژوهشی، فرضیه‌های آماری یکی از این تعاریف را خواهند داشت:

$$۱) \begin{cases} H_0: \sigma_x^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} H_0: \sigma_x^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

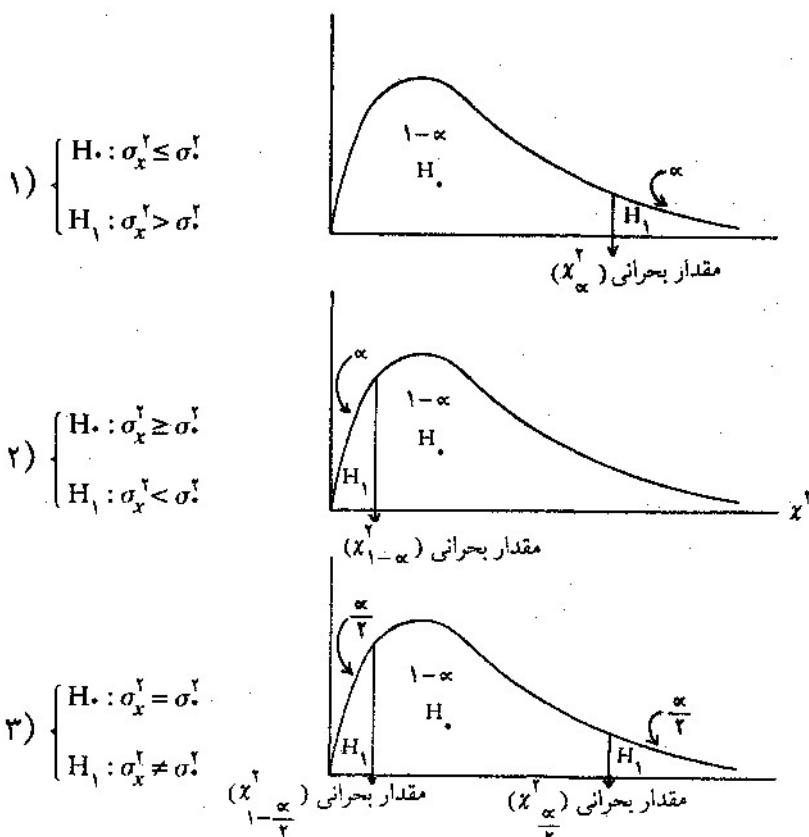
$$۳) \begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

که در حالت‌های فوق σ_0^2 ، واریانس مورد آزمون است.

۲. آماره آزمون: از بحث تخمین به یاد داریم که آماره σ_x^2 ، واریانس نمونه S_x^2 است. توزیع نمونه گیری S_x^2 در صورتی که از یک جامعه نرمال نمونه انتخاب شده باشد، یک توزیع χ^2 است که آماره آزمون آن به این صورت تعریف می شود:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \quad (11-10)$$

۳. مقدار بحرانی: سطح زیر منحنی فرضیه های آماری بر حسب مقدار α بر روی توزیع χ^2 مشخص می شود. آنچه مسلم است براساس قاعده کلی، H_0 دربرگیرنده سطح اطمینان و H_1 دربرگیرنده سطح خطا، α ، است. منحنی هریک از حالت های مرحله اول در شکل ۱۱-۹ آمده است.



شکل ۱۱-۹ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 برای واریانس جامعه

حالت اول نشان‌دهنده یک آزمون یک دنباله راست است که مقدار بحرانی آن براساس α و درجه آزادی، $d.f = n - 1$ ، تعیین می‌شود. حالت دوم آزمون یک دنباله چپ است که مقدار بحرانی آن براساس $1 - \alpha$ و $d.f = n - 1$ از جدول کای - مربع استخراج می‌شود و در حالت سوم دو مقدار بحرانی $\chi^2_{\alpha/2}$ و $\chi^2_{1-\alpha/2}$ باید از جدول کای - مربع استخراج شود؛ چون یک آزمون دو دنباله است.

۴. تصمیم‌گیری: در این مرحله مقدار آماره آزمون با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود. چنانچه کای - مربع محاسبه شده در ناحیه H_0 قرار گیرد فرض H_0 در سطح خطای α درصد پذیرفته می‌شود؛ در غیر این صورت H_0 رد می‌شود. در این تجزیه و تحلیل، ممکن است فرضیه پژوهشی تأیید یا رد شود.

مثال ۱۱-۱۰ مدیر عامل بازار بورس تهران ادعا کرده که ریسک (انحراف معیار) بازده سهام شرکت‌های عرضه‌کننده سهام در بازار بورس کمتر از ۵ تومان است. بدین منظور یکی از کارگزاران، ۲۵ شرکت را به طور تصادفی از بین شرکت‌های عرضه‌کننده سهام در بازار بورس انتخاب کرده که میانگین بازده آنها ۱۴ و انحراف معیارشان ۴ تومان است. اگر بازده شرکت‌های بازار بورس از توزیع نرمال برخوردار باشد، ادعا را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

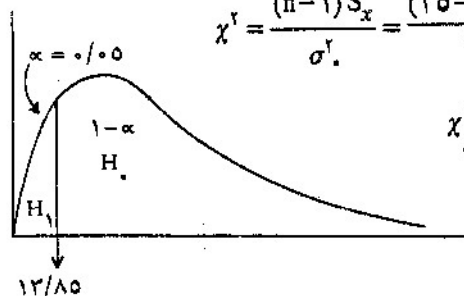
براساس مراحل تعریف شده برای آزمون واریانس جامعه، فرضیه‌های آماری و محاسبات لازم برای بررسی ریسک بازده شرکت‌ها عبارت است از:

$$1. \text{ فرضیه: } H_0: \sigma_x^2 \geq 25$$

$$H_1: \sigma_x^2 < 25$$

$$2. \text{ آماره آزمون: } \chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \frac{(25-1)(4)^2}{25} = 15.36$$

$$3. \text{ مقدار بحرانی: } \chi^2_{0.05, 24} = 13.85$$



۴. تصمیم‌گیری: آمارهٔ آزمون $(\chi^2 = 10/36)$ در مقایسه با مقدار بحرانی $(\chi^2 = 13/85)$ در ناحیه H_0 قرار می‌گیرد؛ بنابراین با ۹۵ درصد اطمینان می‌توان گفت فرض صفر پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرضیه پژوهشی رد شده، نقیض آن پذیرفته می‌شود.

۱۱-۱۳ آزمون فرض آماری برای مقایسهٔ واریانس دو جامعه

فرضیه‌های تطبیقی نه تنها شامل میانگین و نسبت موفقیت است بلکه برای مقایسهٔ واریانس دو جامعهٔ آماری نیز استفاده می‌شود. فرضیه‌ای که به این منظور تدوین شود، به کمک مراحل آزمون مقایسهٔ واریانس دو جامعه بررسی می‌گردد. مراحل آزمون به شرح ذیل است.

۱. فرضها: فرضیه‌های پژوهشی بر حسب نوع آنها به صورت یکی از این حالتها تبیین خواهد شد:

$$1) \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

۲. آمارهٔ آزمون: در صورتی که دو جامعهٔ مورد مقایسه از توزیع نرمال یا تقریب

نرمال برخوردار باشند، آمارهٔ آزمون برای نسبت دو واریانس جامعه، $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ، دارای توزیع

فیشر است که براساس رابطه ۱۱-۱۶ تعریف می‌شود:

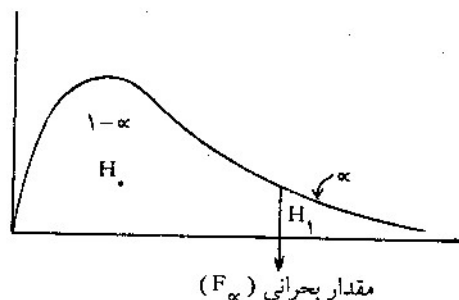
$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \quad (11-16)$$

چنانکه گفته شد، حالت تساوی در H_0 منظور می‌شود. پس اگر فرض تساوی دو واریانس پذیرفته شود، می‌توان رابطه ۱۱-۱۶ را به صورت ساده‌تر در رابطه ۱۱-۱۷ دید.

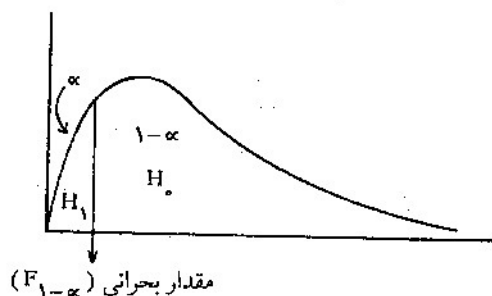
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad (11-17)$$

۳. مقدار بحرانی: مقدار بحرانی براساس α و درجه آزادی صورت $(d.f. = n_1 - 1)$ و درجه آزادی منخرج $(d.f. = n_2 - 1)$ ، از جدول F با توجه به یکی از این اشکال تعیین می شود.

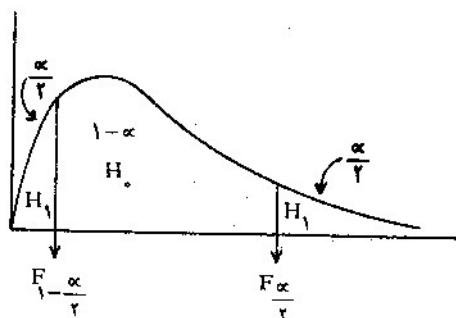
$$۱) \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$



$$۲) \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$



$$۳) \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$



شکل ۱۱.۱۰ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 برای مقایسه واریانس دو جامعه

مقدار بحرانی $F_{1-\alpha}$ از جدول فیشر براساس این رابطه تعریف می شود:

$$F_{(1-\alpha), d.f_1, d.f_2} = \frac{1}{F_{\alpha, d.f_2, d.f_1}} \quad (۱۱-۱۸)$$

۴. تصمیم گیری: چنانچه آماره آزمون در ناحیه H_0 قرار گیرد، H_0 در سطح اطمینان دلخواه تأیید می شود و در غیر این صورت رد می شود.

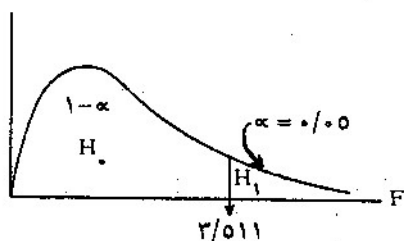
مثال ۱۱-۱۱ در گزارش مدیریت، جمله ای به این صورت توسط مأمور کنترل کیفیت آمده است: «پراکندگی وزن محصولات تولید شده به وسیله ماشین «الف» بیشتر از ماشین «ب» است.» مدیر کارخانه به منظور بررسی گزارش مأمور کنترل کیفیت، از ماشین «الف و ب» نمونه هایی انتخاب کرده که حاصل اطلاعات نمونه به این شرح است. توزیع وزن محصولات که به وسیله ماشین «الف و ب» تولید می شوند نرمال است. صحت جمله را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

ماشین الف	ماشین ب
$n_A = ۱۶$	$n_B = ۸$
$\bar{X}_A = ۱۵/۰$ (کیلوگرم)	$\bar{X}_B = ۱۵/۵$ (کیلوگرم)
$S_A = ۴/۵$ (کیلوگرم)	$S_B = ۲/۲۵$ (کیلوگرم)

۱. فرضها: $H_0: \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$ نقیض ادعا: $H_1: \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

۲. آماره آزمون: $F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{(۴/۵)^2}{(۲/۲۵)^2} = ۴$

۳. مقدار بحرانی: $F_{\alpha, ۱۵, ۷} = ۳/۵۱۱$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.05 \\ d.f_1 = n_A - 1 = 16 - 1 = 15 \\ d.f_2 = n_B - 1 = 8 - 1 = 7 \end{array} \right.$$

۴. تصمیم‌گیری: مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ H_1 قرار می‌گیرد. یعنی اینکه داده‌ها دلالت کافی بر تأیید H_0 در سطح خطای ۵ درصد ندارند. بعلاوه، چون H_1 بیان‌کننده ادعاست، پس می‌توان گفت ادعای مأمور کنترل کیفیت در سطح اطمینان ۹۵ درصد صحت دارد.

تمرین

۱. هدف یک تحقیق، مقایسهٔ طول عمر دو نوع لامپ است. بدین منظور از لامپهای نوع «الف» یک نمونهٔ تصادفی ۲۰ تایی انتخاب شده که میانگین آن ۱۵ هزار ساعت و انحراف معیارش ۴ هزار ساعت است. در حالی که نمونه تصادفی ۲۵ تایی از لامپهای نوع «ب»، میانگین ۱۷ هزار ساعت و انحراف معیار ۶/۵ هزار ساعت دارد. با پذیرفتن فرض نرمال بودن طول عمر لامپها در هر دو نوع، آزمونهای ذیل را در سطح خطای ۵ درصد برگزار کنید.

الف) آیا می‌توان پذیرفت که پراکندگی عمر لامپهای نوع «الف» مساوی ۵ هزار ساعت است؟

ب) آیا می‌توان پذیرفت که پراکندگی عمر لامپهای نوع «الف» کمتر از «ب» است؟

۲. می‌خواهیم یکنواخت بودن چگالی الیاف نخ جوراب بافی تولیدی با دو ماشین ریسندگی را مقایسه کنیم. هر مشاهده‌ای عبارت از اندازه گرفتن وزن ۱۰۰ متر نخ است که به طور تصادفی انتخاب شده است. فرض کنید که ۱۲ مشاهدهٔ وزن از محصول ماشین «الف» و ۱۰ مشاهدهٔ وزن از محصول ماشین «ب» به دست آمده است. انحراف معیار اندازه‌های وزن برای ماشین «الف»، ۲/۳ و برای ماشین «ب»، ۱/۵ است. در سطح اطمینان ۹۰ درصد به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) آیا دلیل قوی وجود دارد که تغییرپذیری تولید برای ماشین «الف» بیشتر از ماشین «ب» است؟

ب) فاصله اطمینان لازم را برای نسبت انحراف معیارهای دو جامعه بسازید.

۳. فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «پراکندگی قیمت پودر لباسشویی در فروشگاههای تهران دست کم ۱۰ تومان است.» برای بررسی این فرضیه، ۳۶ فروشگاه تهران به طور تصادفی انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار قیمت پودر لباسشویی در این فروشگاهها ۱۶۰ و ۹ تومان است، قیمت کالا دارای توزیع نرمال است. در سطح اطمینان ۹۹ درصد آزمون مناسب را برای بررسی فرضیه فوق برگزار کنید و بنویسید تحلیل کاربردی تأیید یا رد فرضیه چیست.

۱۱-۱۴ خلاصه

در این فصل با استفاده از روابط تخمین آماری، چهارچوب و مبانی تبیین فرضیه‌های پژوهشی به کمک فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 بتفصیل بحث شد. به طور کلی برای تبیین فرضیه پژوهشی از نوع میانگین (μ_x) ، مقایسه میانگین دو جامعه $(\mu_1 - \mu_2)$ ، نسبت موفقیت (p) مقایسه نسبت موفقیت در دو جامعه $(p_1 - p_2)$ ، انحراف معیار جامعه (σ_x) و مقایسه واریانس دو جامعه $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$ می‌توان از مراحل چهارگانه ذیل استفاده کرد:

مرحله اول. تعریف فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 ، مرحله دوم. تعیین توزیع نمونه‌گیری آماره و نوع آماره آزمون، مرحله سوم. تعیین سطح زیر منحنی H_0 و H_1 و محاسبه مقدار بحرانی و مرحله چهارم. تصمیم‌گیری.

از مهمترین نکات در مرحله تصمیم‌گیری، تبدیل تصمیم‌آماری به تصمیم مدیریتی است. به عبارت ساده‌تر پس از تأیید یا رد H_0 محقق باید به طور صریح تأیید یا رد فرضیه پژوهشی خود را بیان دارد.

۱۱-۱۵ سؤالات و مسائل

سؤالات دو گزینه‌ای

۱. فرضیه آماری، حکمی درباره جامعه است. ☐ ص ☐ غ
۲. فرضیه صفر، H_0 ، همیشه نشان‌دهنده ادعاست. ☐ ص ☐ غ
۳. فرضیه صفر، H_0 ، همیشه باید دربرگیرنده تساوی باشد. ☐ ص ☐ غ
۴. سطح معنی‌دار، همان مقدار خطای نوع اول است. ☐ ص ☐ غ
۵. خطای نوع دوم عبارت است از احتمال رد H_0 به شرط اینکه H_0 درست باشد. ☐ ص ☐ غ
۶. تنها راه کاهش خطای نوع اول و دوم افزایش حجم نمونه است. ☐ ص ☐ غ
۷. اگر $\mu_x \geq 200$ باشد، آزمون از نوع یک دنباله راست است. ☐ ص ☐ غ
۸. توزیع کای - مربع برای آزمون نسبت واریانسها به کار می‌رود. ☐ ص ☐ غ
۹. آماره‌های به کارگرفته در فتون آزمون فرض آماری همان آماره‌های تخمین هستند. ☐ ص ☐ غ
۱۰. در آزمون مقایسه زوجی، فقط باید از توزیع نمونه‌گیری استیودنت استفاده کرد. ☐ ص ☐ غ

سوالات چهارگزینه‌ای

۱۱. در آزمون $H_0: \mu_x = \mu_0$ برای جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار نامشخص و درجه آزادی کمتر از ۳۰، آماره آزمون عبارت است از:

$$\text{الف) } t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \quad \text{ج) } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{X}}}$$

$$\text{ب) } t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} \quad \text{د) هیچکدام}$$

۱۲. فروشنده‌ای ادعا کرده است که بیش از ۶۰ درصد تولیدات او دست کم ۲۰ سال عمر می‌کنند. فرضیه صفر، H_0 ، برای آزمون این ادعا کدام است؟

$$\text{الف) } H_0: P < \%60 \quad \text{ج) } H_0: P \geq \%60$$

$$\text{ب) } H_0: P \leq \%60 \quad \text{د) } H_0: P > \%60$$

۱۳. سطح زیر منحنی H_0 در آزمون فرض آماری همواره برابر است با:

$$\text{الف) سطح اطمینان آزمون} \quad \text{ج) خطای نوع اول } (\alpha)$$

$$\text{ب) خطای نوع دوم } (\beta) \quad \text{د) به تعریف } H_0 \text{ بستگی دارد.}$$

۱۴. اگر میانگین یک نمونه ۱۰۰ تایی از X مساوی ۳۰ و انحراف معیار آن ۵ باشد و میانگین نمونه‌ای ۲۰۰ تایی از Y مساوی ۲۵ و انحراف معیار آن ۱۰ باشد، مقدار آماره آزمون برای فرض صفر بودن تفاوت میانگینها برابر است با:

$$\text{الف) } 10/81 \quad \text{ج) } 0/77$$

$$\text{ب) } 1/96 \quad \text{د) } 3/44$$

۱۵. کدام یک از این گزینه‌ها صحیح است:

$$\text{الف) } \alpha + \beta = 1 \quad \text{ج) (رد کردن } H_0 \text{ وقتی } H_0 \text{ درست است)}$$

$$\alpha = P$$

$$\text{ب) (رد کردن } H_0 \text{ وقتی } H_0 \text{ درست است)}$$

$$\beta = P$$

$$\alpha = P$$

۱۶. توزیع مجموع دو متغیر نرمال مستقل کدام است؟

$$\text{الف) نرمال} \quad \text{ج) فشر}$$

$$\text{ب) کای - مربع} \quad \text{د) t استیودنت}$$

۱۷. آماره آزمون، نرمال صفر و یک است و $H_0: \mu_x = 40$ تعریف شده است. مقدار آماره آزمون ۴/۵ است. در سطح اطمینان ۹۵ درصد کدام گزینه صحیح است؟ (مقدار جدول ۱/۹۶ فرض شود.)

$$\text{الف) } H_0 \text{ تأیید می‌شود.} \quad \text{ج) } H_1 \text{ تأیید نمی‌شود.}$$

$$\text{ب) } H_1 \text{ تأیید می‌شود.} \quad \text{د) به اطلاعات بیشتری برای تصمیم‌گیری نیاز}$$

است.

۱۸. فرض کنید Z_1 تا Z_K متغیرهای استاندارد صفر و یک باشند. آنگاه توزیع $\sum_{i=1}^K Z_i$ کدام گزینه است.

- (الف) نرمال
(ب) استیودنت
(ج) فشر (F)
(د) کای - مربع (χ^2)

۱۹. در کدام یک از این موارد از آزمون زوجی استفاده می شود.

- (الف) گروههای مستقل
(ب) گروههای همبسته
(ج) زوجهای مستقل از هم
(د) ب و ج

۲۰. ادعا شده است که پراکندگی جامعه «الف» کمتر از جامعه «ب» است. فرض H_0 کدام است؟

(الف) $H_0: \sigma_A^2 < \sigma_B^2$
(ج) $H_0: \sigma_A^2 \geq \sigma_B^2$

(ب) $H_0: \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$
(د) $H_0: \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

۲۱. اطلاعات $\bar{x} = 60$ ، $s_x = 15$ و $n = 10$ از یک جامعه نرمال به دست آمده است. محاسبه کنید

مقدار آماره آزمون برای فرضیه $H_0: \sigma_x^2 = 100$ کدام است؟

- (الف) $20/25$
(ج) 15
(ب) 6
(د) $1/35$

۲۲. اطلاعات ذیل مربوط به دو شرکت «الف و ب» است:

شرکت «الف»	شرکت «ب»
$n_1 = 10$	$n_2 = 15$
$\bar{X}_1 = 100$	$\bar{X}_2 = 120$
$S_1 = 8$	$S_2 = 10$

با فرض نرمال بودن توزیع X در دو شرکت، مقدار آماره آزمون برای بررسی فرضیه «تساوی واریانس X در دو شرکت» کدام است؟

- (الف) $0/80$
(ب) $0/41$
(ج) $0/64$
(د) $0/53$

۲۳. اگر $F_{0.05, 10, 15} = 3/4817$ باشد، مقدار $F_{0.95, 15, 10}$ کدام است؟

- (الف) $0/2872$
(ب) $3/4817$
(ج) $3/3076$
(د) باید جدول F در دسترس قرار گیرد.

۲۴. اگر $n_1 = 120$ ، $n_2 = 100$ ، $\bar{P}_1 = 0/60$ و $\bar{P}_2 = 0/50$ باشد، مقدار آماره آزمون برای آزمون فرض $H_0: P_1 \leq P_2$ کدام است؟

- (الف) $2/0575$
(ب) $1/491$
(ج) $-1/347$
(د) -20071

مسائل

۲۵. در تعریف مدیر موفق گفته می‌شود که «عملکرد کارمندان در زمان مدیریت وی بیشتر از زمان غیبت اوست». برای بررسی تعریف فوق میزان عملکرد ۶ کارمند در زمان مدیریت و غیبت مدیر اندازه‌گیری شده که در این جدول آمده است:

فرد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
عملکرد در زمان مدیریت مدیر	۵۰	۵۵	۶۰	۵۸	۷۰	۷۵
عملکرد در زمان غیبت مدیر	۴۵	۴۷	۵۵	۶۰	۵۰	۶۲

الف) با فرض نرمال بودن امتیازات عملکرد، صحت تعریف را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

ب) فرض کنید، نمونه بالا یک نمونه مقدماتی است و دقت برآورد ± 4 نمره باشد. حجم نمونه لازم را برای بررسی نهایی تحقیق تعیین کنید.

۲۶. در تئوریهای مدیریت بیان شده که مهمترین انگیزه «پول» است. یکی از دانشجویان مدیریت میزان رضایت شغلی ۷ کارمند را قبل از افزایش حقوق ماهانه و بعد از آن اندازه‌گیری و در این جدول خلاصه کرده است:

کارمند	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
قبل از افزایش	۵۰	۷۰	۸۰	۶۰	۵۵	۵۰	۶۸
بعد از افزایش	۶۰	۷۵	۸۰	۷۰	۶۵	۶۲	۷۰

الف) فرض نرمال بودن میزان انگیزه را پذیرفته، صحت ادعا را در سطح خطای یک درصد آزمون کنید.

ب) اگر این نمونه، یک نمونه مقدماتی باشد، حجم نمونه مناسب را با دقت ± 5 نمره تعیین کنید.

۲۷. مدیر نمایشگاه بین‌المللی کتاب ادعا کرده است که میانگین زمان بازدیدکنندگان غرفه خارجی کتاب دست کم ۵ ساعت است. بدین منظور از میان بازدیدکنندگان این غرفه یک نمونه ۶۰ نفره انتخاب شده که میانگین و انحراف معیار زمان بازدید آنها به ترتیب ۴ و ۱/۵ ساعت بوده است. صحت ادعا را در سطح خطای ۲ درصد بررسی کنید.

۲۸. مدیر نمایشگاه از بازدیدکنندگان غرفه داخلی یک نمونه تصادفی ۴۵ نفره انتخاب کرده است که مستقل از نمونه مسأله ۲۷ هستند. میانگین و انحراف معیار زمان بازدید این نمونه نیز به ترتیب ۵/۵ و ۱/۷۵ ساعت است. در سطح خطای ۲ درصد صحت این فرضیه را آزمون کنید: «میانگین زمان بازدید از غرفه داخلی بیشتر از غرفه خارجی است.»

۲۹. فرضیه‌ای به این صورت بیان شده است: «میانگین پرداخت به مدیران در سازمانهای خصوصی کمتر از سازمانهای دولتی است.» تحلیلگری برای بررسی فرضیه فوق از هر گروه نمونه‌هایی انتخاب کرده که خلاصه محاسبات اولیه در این جدول آمده است (داده‌ها بر حسب هزار تومان):

سازمان دولتی	سازمان خصوصی
$n_1 = 20$	$n_2 = 20$
$\bar{X}_1 = 100$	$\bar{X}_2 = 90$
$S_1 = 8$	$S_2 = 10$

توزیع دستمزد در هر دو گروه نرمال است. صحت فرضیه را در سطح اطمینان ۹۹ درصد آزمون کنید.

۳۰. استاندارد یک دستگاه، برش محصولاتی با میانگین طول ۶۰ سانتیمتر است. به منظور بررسی کیفیت دستگاه برش، نمونه‌ای ۴۰ تایی از تولیدات، انتخاب شده که میانگین طول آنها ۵۲ و انحراف معیارشان ۱۵ سانتیمتر است. در سطح خطای یک درصد آزمون مناسب را برگزار کنید.

۳۱. یک دانشجوی کارشناسی ارشد حسابداری فرضیه‌ای به این صورت ارائه کرده است: «در شرکتهای دولتی، استانداردهای حسابداری بخوبی رعایت می‌شوند.» دانشجوی فوق برای بررسی فرضیه خود حسابهای ۱۰۰ شرکت دولتی را به طور تصادفی نقد و بررسی کرد که مشخص شد ۵۵ شرکت از آنها استانداردهای حسابداری را بدرستی رعایت کرده‌اند. در سطح خطای یک درصد با استفاده از اطلاعات نمونه، دانشجو را در آزمون فرضیه یاری دهید.

۳۲. دانشجوی مسأله ۳۱، فرضیه دیگری هم به این شرح بیان کرد: «شرکتهای دولتی در مقایسه با شرکتهای خصوصی تنقید بیشتری برای رعایت استانداردهای حسابداری دارند.» برای بررسی این فرضیه، دانشجو علاوه بر نمونه شرکتهای دولتی در مسأله ۳۱، یک نمونه تصادفی ۱۵۰ تایی از شرکتهای خصوصی را انتخاب و حسابهای آنها را حسابرسی کرده است. از این نمونه، ۶۵ شرکت استانداردهای حسابداری را بخوبی رعایت کرده‌اند. صحت ادعا را در سطح خطای یک درصد آزمون کنید.

۳۳. برای مقایسه نرخ بازده چهار گروه از صنایع از هر کدام از آنها نمونه‌هایی به این شرح انتخاب شده است:

صنعت	تعداد نمونه	میانگین نرخ بازده سالانه	انحراف معیار (ریسک) نرخ بازده سالانه
نساجی (A)	۵۰	۱۰/۵۷	۱۹/۰۵
سلولزی (B)	۳۵	۴/۳۸	۵/۵۲
شیمیایی (C)	۳۰	۲/۴۷	۲/۸۷
دارویی (D)	۳۵	۲/۵۱	۸/۷۶

الف) آزمون مناسب را برای $\sigma_A^2 = 225$ و $H_0: \sigma_A^2 \geq \sigma_B^2$ برگزار کنید ($\alpha = 0.01$).

ب) آزمون مناسب را برای $\mu_B \geq \mu_C$ برگزار کنید ($\alpha = 0.01$).

ج) آزمون مناسب را برای $\sigma_B^2 \geq \sigma_D^2$ برگزار کنید ($\alpha = 0.05$).

۳۴. آزمایشی درباره زمان تشخیص محصول بر حسب استقرار آگهی تبلیغات بر روی ۱۶ نفر به طور تصادفی انجام گرفته و نتایج حاصل بر حسب ثانیه در این جدول آمده است:

استقرار نوع اول	۱	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲
استقرار نوع دوم	۴	۲	۳	۳	۱	۲	۳	۳

زمان تشخیص از توزیع نرمال برخوردار است. آیا می توان گفت بین زمان تشخیص بر حسب نوع استقرار اختلاف معنی دار وجود دارد. چرا؟ سطح معنی دار $\alpha = 0.05$ است.

۳۵. آزمایشی درباره زمان تشخیص محصول بر حسب استقرار آگهی بر روی ۸ نفر که به طور تصادفی انتخاب شده اند، انجام گرفته است. زمان تشخیص محصول بر حسب ثانیه برای هر فرد در وضعیت استقرار نوع اول و نوع دوم در جدول ذیل آمده است (هر فرد تحت آزمایش هر دو استقرار قرار گرفته است).

شخص آزمون شونده	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
استقرار نوع اول	۳	۱	۱	۲	۱	۲	۳	۱
استقرار نوع دوم	۴	۲	۳	۱	۲	۳	۳	۳

آیا می توان گفت نوع استقرار بر زمان تشخیص محصول مؤثر است؟ فرض نرمال بودن زمان تشخیص را پذیرفته و $\alpha = 2\%$ در نظر بگیرید.

۳۶. ملاکهای متعددی برای انتخاب بهترین عرضه کننده مواد اولیه کارخانه وجود دارد؛ از جمله پایین بودن میانگین زمان تحویل و پایین بودن پراکندگی زمان تحویل (ریسک در تحویل).

در حال حاضر مواد اولیه کارخانه به وسیله سه عرضه کننده الف، ب و ج تأمین می شود. ۸ سفارش گذشته مواد اولیه به عنوان نمونه ای تصادفی از کل سفارشات قابل استفاده هستند. اطلاعات مربوط به این سفارشات در جدول خلاصه شده است. توزیع زمان تحویل برای سفارشات هر سه عرضه کننده نرمال است. سطح اطمینان ۹۰ درصد را در نظر گرفته و به این سوالات پاسخ لازم بدهید.

عرضه کننده	الف	ب	ج
n_i	۸	۸	۸
$\bar{x}_i$ (روز)	۲۰	۲۵	۱۵
s_i (روز)	۷	۵	۱۰

الف) آیا می توان گفت عرضه کننده «الف» میانگین زمان تحویل کمتری از عرضه کننده «ب» دارد؟ آزمون مناسب را برگزار کنید.

ب) اگر ملاک انتخاب عرضه کننده «پراکندگی زمان تحویل» باشد، از بین دو عرضه کننده «الف و ج» کدام یک را انتخاب خواهید کرد؟ چرا؟

ج) آیا می توان گفت پراکندگی زمان تحویل کل سفارشات عرضه کننده «ب» ۷ روز است؟

د) آیا می توان گفت میانگین زمان تحویل کل سفارشات عرضه کننده «ج» ۲۰ روز است؟

ه) فرض کنید نمونه تعیین شده برای بررسی یک نمونه مقدماتی است. فرض تساوی واریانس زمان تحویل سفارشات را در هر سه عرضه کننده بپذیرید و با در نظر گرفتن دقت ± 0.5 روز، نمونه مناسب را تعیین کنید (راهنمایی: مقدار واریانس برای محاسبه n عبارت است از:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + (n_3 - 1)s_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3}$$

۳۷. انحراف معیار میزان برق مصرفی منطقه چهار تهران ۲۰۰ تومان است. نمونه ای به حجم ۱۶ خانواده انتخاب شده که میانگین آن ۹۱۰ تومان است. احتمال اینکه انحراف معیار نمونه کمتر از ۲۴۵ تومان باشد، چقدر است؟

۳۸. به منظور بررسی میزان تأثیر یک دوره کوتاه مدت حسابداری، دوره ای برای یک نمونه تصادفی شش نفره برگزار شده و نمره های دانشجویان قبل و بعد از دوره در این جدول آمده است:

نمره قبل از دوره	۴۰	۷۰	۴۵	۵۰	۶۸	۵۵
نمره بعد از دوره	۴۵	۷۲	۵۶	۵۰	۷۴	۶۳

الف) آیا می توان گفت که برگزاری دوره مفید است؟ با ذکر مفروضات، آزمون مناسبی در سطح خطای یک درصد برگزار کنید.

ب) فرض کنید نمونه فوق یک نمونه مقدماتی است. دقت برآورد را ۲ نمره در نظر گرفته و نمونه مناسب را برآورد کنید ($\alpha = 0.01$).

۳۹. برای برآورد حجم نمونه در یک جامعه نرمال، یک محقق عرض برآورد میانگین را ۱۰ در نظر گرفته است. او معتقد است که حداقل و حداکثر مقداری که X می تواند در جامعه آماری به خود اختصاص دهد به ترتیب ۲۰ و ۱۲۰ واحد است. حجم نمونه را در سطح اطمینان ۹۹ درصد برآورد کنید. آیا حجم نمونه تعیین شده بهینه است؟ چرا؟

۴۰. یک دستگاه خودکار باید پیستونهایی به قطر ۲۵ میلیمتر تولید کند. فرض کنید قطر پیستونها توزیع نرمال دارد. برای کنترل دقت کار دستگاه، نمونه ای ۱۶ تایی از پیستونها به طور تصادفی انتخاب شده که میانگین قطر پیستونها در آن برابر $24/98$ میلیمتر با انحراف معیار 0.02 میلیمتر بوده است. آیا در سطح معنی دار یک درصد می توان ادعا کرد که دستگاه مطابق استاندارد کار می کند؟ رابطه آزمون فرض و تخمین فاصله را برای این ادعا بررسی و نتایج را تحلیل کنید.

پاسخنامه سؤالات

۱) ص	۲) غ	۳) ص	۴) ص
۵) غ	۶) ص	۷) غ	۸) غ
۹) ص	۱۰) غ	۱۱) ب	۱۲) ب
۱۳) الف	۱۴) ج	۱۵) ج	۱۶) الف
۱۷) ب	۱۸) د	۱۹) د	۲۰) ج
۲۱) الف	۲۲) ج	۲۳) الف	۲۴) ب