

کاربردهای آزمون کای-مربع در مدیریت

۱۵-۱ مقدمه

در فصول مربوط به تخمین و آزمون فرض آماری در تعیین فاصله اطمینان برای واریانس و نیز آزمون فرضیه درباره آن از توزیع کای-مربع به اختصار یاد کردیم. همچنین در بخش ۱۱-۱۸ رابطه توزیع کای-مربع با سایر توزیعها و خواص آن بحث و بررسی شد. توزیع کای-مربع به صورت فرمول ریاضی زیر نوشته می شود:

$$f(u) = \frac{1}{(\frac{k}{2} - 1)!} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} u^{\frac{(k}{2}) - 1} e^{-\frac{u}{2}}, u > 0 \quad (15-1)$$

که در آن e عدد ثابت $2/71828000$ و k تعداد درجه آزادی است. متغیر u را معمولاً با حرف یونانی کای (χ) با توان ۲ نمایش می دهند؛ بنابراین آن را توزیع χ^2 خوانند. میانگین و واریانس توزیع کای-مربع به ترتیب عبارتند از: k و $2k$. اشکال توزیع کای-مربع برای چندین مقدار مختلف k در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده اند. در این شکل مشاهده می شود که اشکال توزیع χ^2 برای $k=1$ و $k=2$ کاملاً از شکل کلی آن برای $k>2$ متفاوت است. همچنین ملاحظه خواهیم کرد که χ^2 مقادیری بین صفر و بی نهایت را می تواند به خود بگیرد. چون χ^2 از مجموع مقادیر مجذور شده تشکیل شده است هرگز نمی تواند مقادیر منفی را به خود اختصاص دهد.

توزیع کای-مربع علاوه بر تخمین و آزمون آماری واریانس، کاربردهای بسیار زیادی دارد. از توزیع کای-مربع در آزمون فرضیه هایی که داده های مورد تجزیه و تحلیل به صورت فراوانی ارائه شده اند می توان استفاده کرد. درباره شیوه های آزمون فرضیه های مزبور تحت عناوین «آزمون استقلال»

آزمون همگونی^۱ و آزمون نیکویی برازش^۲ در این فصل بتفصیل بحث خواهد شد. در این فصل خواهیم دید که همه آزمونهای کای - مربع مورد استفاده را می توان به نحوی به صورت آزمونهای برازش در نظر گرفت. به گونه ای که برازش فراوانیهای مشاهده شده را به فراوانیهای مورد انتظار در صورتی که داده ها تحت نظریه معین یا فرضیه ای تولید شده باشند، آزمون می کنند. در عین حال عبارت «برازش» را برای استفاده از مفهوم محدودتری به کار می بریم.

۱۵-۲ آزمون استقلال

متداولترین استفاده از توزیع کای - مربع آزمون فرضیه، وجود استقلال بین دو معیار رده بندی داده هاست، در صورتی که معیارهای مزبور به همان مجموعه اعمال شود. چنانچه توزیع یکی از معیارهای رده بندی بدون توجه به توزیع معیار دیگر رخ دهد، می گوئیم که دو معیار رده بندی از هم مستقل هستند؛ برای مثال چنانچه سطح عملکرد و میزان رضایت کارمندان سازمان از هم مستقل باشد، انتظار ما این است که توزیع عملکرد بدون توجه به توزیع رضایت شغلی کارمندان اتفاق افتد. به عبارت دیگر در جدول توأم آنها می توان شرط استقلال را به صورت رابطه ۱۵-۲ دید:

$$f(x, y) = f(x) \times f(y) \quad (15-2)$$

به عبارت دیگر اگر $f(x, y)$ را احتمال توأم x و y بدانیم و احتمال اشتراک دو حادثه خاص x و y مساوی احتمال حاصلضرب آنها باشد، آن دو حادثه و در حالت عمومی تر آن دو متغیر x و y مستقل هستند؛ بنابراین می توان گفت: «آزمون استقلال کای - مربع برای بررسی فرضیه استقلال دو متغیر که دست کم یکی از آنها کیفی است استفاده می شود. در این آزمون فراوانیهای مشاهده شده با فراوانیهای مورد انتظار استقلال دو متغیر مقایسه می شوند».

داده های جمع آوری شده برای متغیرها در یک جدول که شامل r سطر و c ستون است خلاصه می شوند. به طور کلی چنین جدولی را «جدول توافقی»^۳ گویند. طریقه

طبقه‌بندی داده بر طبق دو معیار (متغیر) برای نمونه‌ای n تایی از یک جامعه آماری را می‌توان در جدول ۱۵-۱ دید:

جدول ۱۵-۱ جدول توافقی برای آزمون استقلال

متغیر دوم \ متغیر اول	۱	۲	۳	...	C	مجموع
۱	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
۲	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2c}	$n_{2.}$
۳	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3c}	$n_{3.}$
...	...	...	...	...	...	...
r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
مجموع	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	...	$n_{.c}$	n

مقادیر n_{ij} ، فراوانیهای مشاهده شده در هر سلول^۱ است که فصل مشترک سطر i و ستون j می‌باشد. جمع سطر i ، $n_{i.}$ و جمع ستون j ، $n_{.j}$ علامتگذاری شده است. با فرض صفر (H_0) یا فرضیه استقلال دو متغیر، فراوانیهای مورد انتظار^۲ (Fe_i) را برای هر سلول محاسبه می‌کنند. فراوانی مورد انتظار، تعداد (Fe_i) است که از حاصلضرب n در احتمال استقلال به دست می‌آید، یعنی:

$$Fe_i = f(x,y) \times n \text{ یا } Fe_i = \frac{(n_{i.} \times n_{.j})}{n} \quad (15-3)$$

همچنین می‌توان از حاصلضرب جمع سطر i در جمع ستون j تقسیم بر n مقدار Fe هر سلول را محاسبه کرد. پس از محاسبه Fe_i ، فراوانیهای مورد انتظار با فراوانیهای مشاهده شده با هم مقایسه می‌شوند. اگر تمایز آنها «کوچک» باشد، فرضیه صفر قابل دفاع است و نتیجه می‌گیریم که دو معیار (دو متغیر) از هم مستقل هستند، ولی اگر تمایز آنها «بزرگ» باشد، فرضیه صفر رد می‌شود و نتیجه می‌گیریم که دو متغیر از هم مستقل نیستند. بر مبنای اندازه آماره آزمون می‌توان نتیجه گرفت که آیا تمایز بین فراوانیهای

1. cell

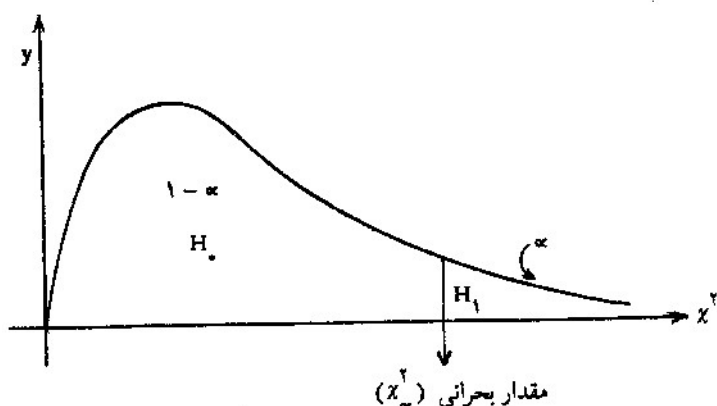
2. expected frequency

مشاهده شده (FO_i) و مورد انتظار (FE_i) «کوچک» است یا «بزرگ» که به صورت معادله ۱۵-۴ بیان می‌شود:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(FO_i - FE_i)^2}{FE_i} \quad (15-4)$$

در معادله ۱۵-۴، FO_i و FE_i به ترتیب فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار در سلول‌های جدول ۱۵-۱ هستند. منطقی‌تر خواهد بود که فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار را در سلول‌ها با FO_{ij} و FE_{ij} نشان دهیم، اما به منظور حفظ سادگی در علایم و فرمولها، علایم FO_i و FE_i را به کار می‌گیریم.

چنانچه سلول‌ها را از ۱ تا k شماره گذاری کنیم به ما کمک خواهد کرد. منظور از سلول ۱، سلول با زیرنویس ۱۱ و منظور از k ، سلول با زیرنویس rc خواهد بود. می‌توان ثابت کرد که $\sum \frac{(FO_i - FE_i)^2}{FE_i}$ ، تقریباً از توزیع χ^2 با $(c-1) \times (r-1)$ درجه آزادی برخوردار است. در صورتی که فرضیه صفر درست باشد؛ اگر مقدار آماره آزمون در معادله ۱۵-۴ بزرگتر از مقدار کای - مربع جدول باشد پس فرض H_0 در سطح خطای α رد شده و فرض H_1 (وجود ارتباط بین دو متغیر) پذیرفته خواهد شد. با این توصیف مشخص می‌شود که آزمون استقلال کای - مربع یک آزمون یک دنباله است که H_0 به اندازه α در دنباله راست آن تعریف خواهد شد. منحنی آزمون استقلال در شکل ۱۵-۱ دیده می‌شود:



شکل ۱۵-۱ سطح زیر منحنی H_0 و H_1 در آزمون استقلال کای - مربع

مثال ۱۵-۱ فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «بین عملکرد کارمندان و میزان رضایت شغلی آنها ارتباط وجود دارد.» برای بررسی فرضیه فوق یک نمونه ۱۸۰ نفره از بین کارمندان به طور تصادفی انتخاب و میزان عملکرد و رضایت شغلی آنها اندازه‌گیری شده است. این جدول نشان‌دهنده اطلاعات به دست آمده از نمونه است:

سطوح رضایت شغلی \ سطوح عملکرد				مجموع
	بالا	متوسط	پایین	
خوب	۱۸	۲۰	۷	۴۵
متوسط	۱۵	۳۷	۳۸	۹۰
ضعیف	۷	۲۳	۱۵	۴۵
مجموع	۴۰	۸۰	۶۰	n=۱۸۰

سطح خطای ۵ درصد را در نظر گرفته و صحت فرضیه فوق را بررسی کنید.
چنانکه پیداست، مراحل چهارگانه آزمون فرض قابل اعمال است؛ بنابراین حل مسأله را با ذکر مراحل آزمون انجام می‌دهیم.
۱. فرضها: در آزمون استقلال، فرض H_0 همیشه نشان‌دهنده استقلال دو متغیر و فرض H_1 نقیض آن است.

$$\begin{cases} H_0: \text{بین عملکرد و رضایت شغلی کارمندان ارتباط وجود ندارد;} \\ H_1: \text{بین عملکرد و رضایت شغلی کارمندان ارتباط وجود دارد;} \end{cases}$$

۲. آماره آزمون: برای محاسبه آماره آزمون فراوانیهای مورد انتظار را برای هر سلول براساس رابطه ۱۵-۳ محاسبه کرده و آنها را در کنار فراوانیهای مشاهده شده با علامت O مشخص می‌کنیم. مثلاً Fe_1 عبارت است از:

$$Fe_1 = \frac{(\text{مجموع سطر } ۲)(\text{مجموع سطر } ۱)}{۱۸۰}$$

یعنی:

$$Fe_1 = \frac{(۴۵)(۴۰)}{۱۸۰} = ۱۰$$

حال کل محاسبات در جدول زیر دیده می‌شود:

سطوح رضایت شغلی				مجموع
	بالا	متوسط	پایین	
خوب	۱۸ (۱۰)	۲۰ (۲۰)	۷ (۱۵)	۴۵
متوسط	۱۵ (۲۰)	۳۷ (۴۰)	۳۸ (۳۰)	۹۰
ضعیف	۷ (۱۰)	۲۳ (۲۰)	۱۵ (۱۵)	۴۵
مجموع	۴۰	۸۰	۶۰	۱۸۰

براساس رابطه ۴-۱۵ می توان نوشت:

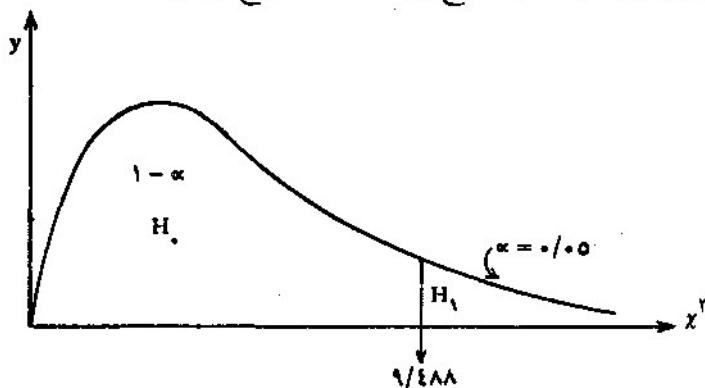
$$\chi^2 = \frac{(18-10)^2}{10} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(7-15)^2}{15} + \dots + \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(15-15)^2}{15} = 15/625 \text{ آماره آزمون}$$

۳. مقدار بحرانی: گفته شد که آزمون استقلال، یک دنباله راست است؛ چون فقط تمایزات بزرگ بین F_0 و F_e وجود دارد که نشان دهنده عدم استقلال است. همچنین مقدار بحرانی برحسب $\alpha = 0/05$ و $d.f = (r-1)(c-1) = 4$ یعنی؛ $d.f = (3-1)(3-1) = 4$ محاسبه می شود.

پس:

$$\begin{cases} \alpha = 0/05 \\ d.f = 4 \end{cases} \Rightarrow \chi^2_{0/05, 4} = 9/488 \text{ مقدار بحرانی}$$

مقدار بحرانی از جدول کای - مربع پیوست ۴ استخراج می شود.



۴. تصمیم‌گیری: از آنجا که آماره آزمون در ناحیه H_1 قرار می‌گیرد. پس می‌توان گفت که در سطح اطمینان ۹۵ درصد بین عملکرد و رضایت شغلی کارمندان ارتباط معنی‌داری وجود دارد.

تمرین

۱. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «بین سطح بلوغ کارکنان و سبک رهبری مدیران ارتباط وجود دارد.» در راستای بررسی فرضیه، سطح بلوغ کارکنان و سبک رهبری ۲۴۰ مدیر از مدیران کشور اندازه‌گیری شده است. که خلاصه آن در جدول زیر آمده است:

سطح بلوغ کارکنان سبک رهبری	M_1	M_2	M_3	M_4
S_1	۲۰	۱۵	۱۰	۵
S_2	۱۸	۱۵	۱۵	۱۲
S_3	۵	۱۰	۲۰	۳۵
S_4	۰	۵	۱۵	۴۰

در سطح خطای یک درصد صحت فرضیه فوق را بررسی کنید.
۲. مطالعه‌ای درباره پانصد نفر از کارکنان یک شرکت انجام داده‌اند. این شرکت محصولی را تولید می‌کند که نسبت به ایجاد اختلال تنفسی در کارکنان آنان مشکوک هستند. مستخدمان شرکت را بر مبنای سطح ارائه محصول و نمایش علائم اختلالات تنفسی دسته‌بندی کرده و نتایج را در این جدول نشان داده‌اند.

سطح ارائه محصول علائم	بالا	محدود	ناشناخته
بلی	۱۸۵	۳۳	۱۷
خیر	۱۲۰	۷۳	۷۲

در سطح معنی‌دار یک درصد آزمون کنید آیا داده‌ها دلیل کافی مبنی بر وجود رابطه‌ای بین سطح ارائه محصول و وجود علائم اختلال تنفسی به دست می‌دهند؟
۳. دلیل یک دنباله راست بودن آزمون استقلال کای-مربع چیست؟

۱۵.۳ آزمون همگونی

آزمون استقلال χ^2 مبتنی بر طرحی از نمونه‌گیری است که در آن یک نمونه تصادفی تکی به حجم n با توجه به دو صفت به طور همزمان رده‌بندی می‌شود. در جدول توافقی حاصل، هر دو مجموعه فراوانیهای کل کناری، متغیرهای تصادفی هستند. در عین حال گاهی ممکن است جمع کل سطر یا ستون را تحت اختیار پژوهشگر قرار دهد؛ یعنی پژوهشگر می‌تواند نمونه‌های مستقل انتخابی از هر جمعیت را مشخص کند. در این صورت گفته می‌شود که یک مجموعه از جمع کل حاشیه‌ای ثابت بوده در حالی که مجموعه دوم مربوط به معیار رده‌بندی که به نمونه‌ها اعمال می‌شود، تصادفی است. در چنین حالتی، آزمون همگونی را می‌توان ذکر کرد.

آزمون استقلال و آزمون همگونی نه تنها دو شیوه مختلف نمونه‌برداری را ارائه می‌دهند، بلکه فرضیه‌های صفر و سؤالات متفاوتی را بیان می‌کنند. آزمون استقلال به این سؤال که آیا دو معیار رده‌بندی از هم مستقل هستند، مربوط می‌شود. آزمون همگونی پاسخگوی این سؤال است که آیا نمونه‌ها از جمعیت‌هایی انتخاب شده‌اند که نسبت به معیار رده‌بندی همگون هستند؟ در حالت دوم فرضیه صفر نشان‌دهنده این نکته است که نمونه‌ها از یک جمعیت انتخاب شده‌اند. علی‌رغم وجود اینگونه تفاوتها هم در مفهوم و هم در شیوه نمونه‌برداری، هر دو آزمون از نظر نظری و ریاضی یکسان هستند.

فرض کنید که نمونه‌های تصادفی مستقل به ترتیب به حجمهای $n_1, \dots, n_r$ از r جامعه $A_1, \dots, A_r$ انتخاب شده‌اند. با رده‌بندی هر نمونه به رسته‌های $B_1, \dots, B_c$ یک جدول توافقی $r \times c$ که در جدول ۱۵-۲ نشان داده شد به دست می‌آید. در این جدول مجموع سطرها، حجمهای نمونه‌ای ثابتی هستند. احتمالهای رسته‌ای مختلف B ی درون هر جامعه در جدول ۱۵-۳ ظاهر می‌شوند، که در آن هر w_{ij} یک احتمال شرطی را نشان می‌دهد.

$$w_{ij} = P(B_j | A_i) = \text{احتمال } B_j \text{ ی درون جامعه } A_i \quad (15.5)$$

توجه کنید که احتمال کل هر سطر جدول ۱۵-۳ برابر یک است، اما مجموع ستونها مفهوم چندانی ندارند.

جدول ۱۵.۲ یک جدول $r \times c$ با مجموع سطری ثابت

	B_1	B_2	...	B_c	مجموع
A_1					$n_{1.}$
$\vdots$					$\vdots$
A_r					$n_{r.}$
کل	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.c}$	19

جدول ۱۵.۳ احتمالاتی رسته‌های B ی درون هر جامعه A_i

	B_1	B_2	...	B_c	مجموع
A_1	w_{11}	w_{12}	...	w_{1c}	۱
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	w_{r1}	w_{r2}	...	w_{rc}	۱
مجموع					

این فرض صفر که احتمال هر رده B برای تمام r جامعه یکسان است می‌تواند اکنون به طور رسمی به این صورت بیان شود:

$$H_0: w_{1j} = w_{2j} = \dots = w_{rj}, \quad j = 1, 2, \dots, C \quad (15.6)$$

تحت فرض H_0 ، احتمال مشترک رسته B_j را می‌توان از نمونه‌ایهای ادغام شده با توجه به این مطلب برآورد کرد که از کل n عنصر نمونه‌گیری شده، $n_{.j}$ عنصر، دارای رسته B_j است. احتمال برآورد شده برابر است با:

$$\hat{w}_{1j} = \hat{w}_{2j} = \dots = \hat{w}_{rj} = \frac{n_{.j}}{n} \quad (15.7)$$

و فراوانی مورد انتظار برآورد شده در سلول (i, j) ام، تحت فرض H_0 برابر است با:

(۱۵-۸)

احتمال برآورد شده B_j درون A_i $\times$ (تعداد A_i ی نمونه گیری شده) $Fe_i =$

$$Fe_i = n_i \times \hat{W}_{ij} = \frac{n_i \times n_j}{n} \quad (15-9)$$

آماره آزمون با $\chi^2 = \sum \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$ نشان داده می شود. هریک از r جامعه دارای c خانه است و، $(c-1)$ درجه آزادی به آماره χ^2 می دهد. از کل درجات آزادی؛ یعنی $r(c-1)$ ، تعداد پارامترهای برآورد شده کم می شود. چون c احتمال ستونی را که مجموع آنها یک است برآورد کرده ایم، تعداد پارامترهای برآورد شده برابر با $(c-1)$ است. در نتیجه:

$$d.f = r(c-1) - (c-1) = (r-1)(c-1) \quad (15-10)$$

در مقایسه با سنجش استقلال می توان دید که فرمولهای χ^2 و همچنین درجه های آزادی یکسان هستند، فقط روش نمونه گیری و فرمول بندی فرض صفر برای این دو حالت متفاوتند.

مثال ۱۵-۲ از شرکت «الف»، ۴۰۰ نفر و از شرکت «ب»، ۳۰۰ نفر برای نمونه انتخاب شده اند. ۲۵۰ نفر از شرکت «الف» و ۱۵۰ نفر از شرکت «ب» از کیفیت محیط کار خود ناراضی بوده اند. آیا می توان گفت که نسبت افراد ناراضی در دو شرکت با همدیگر یکسان است؟

جدول ۱۵-۴ جدول توافقی 2×2

جمع	افراد راضی	افراد ناراضی	
۴۰۰	۱۵۰	۲۵۰	جامعه الف
	(۱۷۱/۴۳)	(۲۲۸/۵۷)	
۳۰۰	۱۵۰	۱۵۰	جامعه ب
	(۱۲۸/۵۷)	(۱۷۱/۴۳)	
۷۰۰	۳۰۰	۴۰۰	جمع

$$\chi^2 = 2/009 + 2/678 + 2/678 + 3/572 = 10/937$$

$$H_0: p_1 = p_2$$

$$H_1: p_1 \neq p_2$$

این فرضیه‌ها نشان‌دهنده آزمون فرض نسبت موفقیتها در دو شرکت هستند؛ بنابراین باید قابل مقایسه با روش آزمون نسبت موفقیت باشند.

با فرض اینکه p_1 و p_2 به ترتیب احتمالات نارضایتی برای شرکت «الف و ب» باشند، مایلیم فرض صفر، $H_0: p_1 = p_2$ را در برابر $H_1: p_1 \neq p_2$ آزمون کنیم. برای آزمون توافقی χ^2 ، فراوانیهای مورد انتظار که به روش معمولی محاسبه شده‌اند، در پرانتزهای جدول ۱۵-۴ نشان داده شده‌اند. مقدار محاسبه شده χ^2 برابر ۱۰/۹۳۷ با درجه آزادی یک، چون این مقدار بزرگتر از ۳/۸۴۱ (مقدار ۵ درصد جدول χ^2 با درجه آزادی یک) است فرض صفر رد می‌شود.

این مسأله مربوط به آزمون برابری دو نسبت دو جمله‌ای است و می‌توان به صورت دیگر، با استفاده از آزمون Z بحث شده در فصل یازدهم آن را حل کرد. برای به کار بردن Z، این محاسبات را باید انجام داد:

$$\bar{p}_1 = \frac{250}{400} = 0/625$$

$$\Rightarrow \bar{p} = \frac{250 + 150}{700} = 0/571$$

$$\bar{p}_2 = \frac{150}{300} = 0/50$$

$\bar{p}$ برآورد ادغام شده $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ است. مقدار آماره آزمون عبارت است از:

$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0/625 - 0/50)}{\sqrt{(0/571)(0/429)\left(\frac{1}{400} + \frac{1}{300}\right)}} = 3/307$$

چون Z خارج از $\pm 1/96$ است، فرض صفر در $\alpha = 0/05$ می‌شود. با محاسبه جبری می‌توان نشان داد که Z^2 به طور دقیق همان χ^2 برای یک جدول توافقی 2×2

است. این موضوع در واقع حالت مربوط به مثال ماست، که در آن $Z^2 = (3/307)^2 = 10/937 = \chi^2$ است. بعلاوه $3/841 = (1/96)^2$ با نقطه ۵ درصد χ^2 با درجه آزادی یک برابر است. پس دو شیوه آزمون هم‌ارزند. البته اگر فرض مقابل یکطرفه باشد، مثل $H_1: p_1 > p_2$ ؛ آنگاه آزمون χ^2 مناسب نیست.

تمرین

۱. از وزارتخانه‌های کشاورزی، صنایع و راه و ترابری به ترتیب ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ مدیر به طور تصادفی برگزیده شده‌اند. از این نمونه‌ها ۵۰ مدیر از وزارت کشاورزی، ۸۰ مدیر از وزارت صنایع و ۱۲۰ مدیر از وزارت راه و ترابری وظیفه‌مدار هستند. آیا می‌توان در سطح خطای یک درصد پذیرفت که نسبت مدیران وظیفه‌مدار در سه وزارتخانه یکسان است؟
۲. فرضیه یک تحقیق عبارت است از: «بلوغ پیروان در سطح سازمانهای «الف و ب و ج» یکسان است.» به منظور بررسی فرضیه فوق از هر سازمان یک نمونه تصادفی ۱۲۰ نفره انتخاب شده است. ۶۰ نفر از سازمان «الف»، ۸۰ نفر از سازمان «ب» و ۷۵ نفر از سازمان «ج» دارای بلوغ کاری بالا هستند. در سطح خطای یک درصد صحت فرضیه فوق را آزمون کنید.

۱۵-۴ فراوانیهای کوچک مورد انتظار

معمولاً در کاربرد آزمون کای-مربع فراوانی مورد انتظار برای یک یا بیشتر از یک طبقه کوچک، و شاید خیلی کمتر از یک، باشد.

در متون این نکته ذکر شده است که تقریب به وسیله χ^2 در صورتی که برخی از فراوانیهای مورد انتظار کوچک باشد از اعتبار جدی برخوردار نیست. در عین حال، در میان نویسندگان اتفاق نظر وجود ندارد که پیش از تعدیل نمودن فراوانیهای مورد انتظار یا صرف نظر کردن χ^2 به نفع آزمون دیگری، اندازه‌های فراوانیهای نظری چقدر باشد. برخی از نویسندگان بویژه متقدمان حدود کمتر از ۱۰ را پیشنهاد می‌کنند در حالی که دیگران معتقدند که فراوانیهای مورد انتظار کمتر از ۵ نباید باشد. کوکران^۱، که حدود سال ۱۹۵۰ مقاله‌ای نوشته است، پیشنهاد می‌کند که برای آزمونهای نیکویی برازش توزیعهای یک نمایی (مانند توزیع نرمال) دست کم فراوانی مورد انتظار کمتر از یک نباشد. چنانچه در عمل پژوهشگر بخواهد یک یا بیشتر از یک فراوانی مورد انتظار کمتر از یک را به حساب آورد، باید طبقات مجاور را ترکیب کند تا به حداقل مقدار

پیشنهادی برسد. این نوع ترکیب طبقات، تعداد طبقات یا گروهها را کاهش می‌دهد و در نتیجه تعداد درجات آزادی نیز تقلیل می‌یابد. در سالهای اخیر نظریات کوکران در مقیاس وسیعی توسط آماردانان به کار رفته است.

۱۵-۵ آزمون نیکویی برازش

چنانکه خاطر نشان شد، آزمون برازندگی زمانی مناسب است که پژوهشگر بخواهد در مورد سازگاری یا ناسازگاری یک توزیع مشاهده شده با توزیع نظری تصمیم بگیرد؛ برای مثال ممکن است تصمیم‌گیری در مورد سازگاری یا ناسازگاری نمونه‌ای از مقادیر مشاهده شده متغیری تصادفی با این فرضیه که نمونه مزبور از جامعه نرمال است مد نظر باشد. شیوه تصمیم‌گیری بدین گونه است که مقادیر را در طبقه‌های مانعة‌الجمع (ناسازگار) قرار داده و توجه خود را به فراوانی آنها در هر طبقه معطوف گردانیم. سپس از آگاهی خود درباره توزیع نرمال بهره‌گیریم تا فراوانی مورد انتظار هریک از طبقات را در صورتی که نمونه از جامعه نرمال انتخاب شده باشد تعیین کنیم. چنانچه اختلاف بین مقادیر مشاهده شده و مقادیر انتظاری، به شرط آنکه نمونه‌برداری از توزیع نرمال صورت گرفته باشد، بزرگتر از حدی باشد که بتوان آن را تصادفی دانست، می‌توان چنین نتیجه گرفت که نمونه از توزیع نرمال انتخاب نشده است. اگر این تمایز شانس باشد، نتیجه می‌شود که نمونه ممکن است از جامعه نرمال انتخاب شده باشد. به همین ترتیب می‌توان آزمون نیکویی برازش را در مواردی که توزیع نظری یکنواخت، پواسون، دو جمله‌ای یا هر توزیع دیگری باشد، به کاربرد. حال با بررسی مثالهایی به توضیح بیشتر در این باره می‌پردازیم.

مثال ۱۵-۳ آزمون نیکویی برازش مربوط به توزیع نرمال. این آزمون را با استفاده از یک مثال دنبال می‌کنیم. فرض کنید طول ۱۰۰ میله تولیدی از محصولات یک کارخانه اندازه‌گیری شده و در جدول زیر (۱۵-۵) آمده است:

برای محاسبه فراوانیهای نظری (مورد انتظار) که به وسیله یک توزیع نرمال تولید شده باشند از طریق این مراحل اقدام کنید:

جدول ۱۵.۵ طول ۱۰۰ میله (برحسب میلیمتر)

تعداد (F_{0i})	طول (برحسب میلیمتر)
۱	۸۰-۸۹
۰	۹۰-۹۹
۳	۱۰۰-۱۰۹
۱۰	۱۱۰-۱۱۹
۱۹	۱۲۰-۱۲۹
۲۱	۱۳۰-۱۳۹
۲۳	۱۴۰-۱۴۹
۱۱	۱۵۰-۱۵۹
۸	۱۶۰-۱۶۹
۱	۱۷۰-۱۷۹
۲	۱۸۰-۱۸۹
۳	۱۹۰-۱۹۹
۱۰۰	مجموع

۱. اگر ضرورت دارد مقدار μ_x و σ_x^2 را تخمین بزنید. به منظور بررسی اینکه آیا یک نمونه از توزیع نرمال برخوردار است یا خیر ما به میانگین و انحراف معیار آن جامعه نیاز داریم. در این مثال که مقدار میانگین و انحراف معیار مجهول است ناچاریم که این مقادیر را به کمک نمونه فوق برآورد کنیم:

$$\bar{X} = \frac{\sum F_{0i} X_i}{\sum F_{0i}} = 138/10 \quad (15.11)$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 F_{0i}}{\sum F_{0i} - 1} = 342/46$$

۲. حدود طبقات حقیقی را برای هر طبقه و هر گروه از داده‌ها (حدود کرانه‌ها)

پیدا کنید. برای پیدا کردن حدود کرانه‌ها از حد پایین هر طبقه $\frac{1}{4}$ کم کنید و به حد بالای آن طبقه اضافه کنید. حدود واقعی طبقات دارای فاصله یکسان است:

میلیمتر (۷۹/۵-۸۹/۵)

میلیمتر (۸۹/۵-۹۹/۵)

میلیمتر (۹۹/۵-۱۰۹/۵)

⋮

۳. حد بالای هر طبقه، مقداری است که برای استاندارد کردن طبقات به کار

می‌رود:

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

ولی ما به دلیل استفاده از نمونه به جای آن از این رابطه جایگزینی استفاده خواهیم کرد:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S_x}$$

رای مثال برای استاندارد کردن ۸۹/۵ به این شرح عمل می‌شود:

$$Z = \frac{89/5 - 138/10}{18/5} = -2/63$$

۴. سطح زیر منحنی سمت چپ حد بالای هر طبقه $\phi(Z)$ سطح زیر منحنی متناظر با مقدار استاندارد که تراکمی از تابع احتمال نرمال صفر و یک است) را پیدا کنید. برای $X=89/5$ ، $Z=-2/63$ و $\phi(Z)=0/00424$ است.

۵. فراوانیهای مورد انتظار به آسانی از فراوانیهای تراکمی حاصل می‌شوند. جدولهای ۱۵-۶ و ۱۵-۷ تمامی محاسبات فراوانی مورد انتظار تراکمی و مورد انتظار هر طبقه از یک توزیع $N(138/10, 18/5)$ را نشان می‌دهند. توجه شود که قبل از اولین طبقه یک طبقه دیگر که با ۷۹/۵ شروع می‌شود، اضافه شده است و یک طبقه نیز در آخر اضافه شده است.

در این مثال نیز جدول تجدید نظر شده که نشان‌دهنده طبقات ادغام شده است، فراهم آمده است.

جدول ۱۵-۶ فراوانی مورد انتظار تراکمی

حدود کرانه	حد بالا	Z	$\phi(Z)$	فراوانیهای تراکمی $100 \times \phi(Z)$	فراوانیهای مورد انتظار
۷۹/۵ و کمتر	۷۹/۵	-۳/۱۷	۰/۰۰۰۸	۰	۰
۷۹/۵-۸۹/۵	۸۹/۵	-۲/۶۳	۰/۰۰۴۳	۰/۴	۰/۴
۸۹/۵-۹۹/۵	۹۹/۵	-۲/۰۹	۰/۰۱۸۳	۱/۸	۱/۴
۹۹/۵-۱۰۹/۵	۱۰۹/۵	-۱/۵۰	۰/۰۶۰۶	۶/۱	۴/۳
۱۰۹/۵-۱۱۹/۵	۱۱۹/۵	-۱/۰۱	۰/۱۵۶۲	۱۵/۶	۹/۵
۱۱۹/۵-۱۲۹/۵	۱۲۹/۵	-۰/۴۶	۰/۳۲۲۸	۳۲/۳	۱۶/۷
۱۲۹/۵-۱۳۹/۵	۱۳۹/۵	۰/۰۸	۰/۵۳۱۹	۵۳/۲	۲۰/۹
۱۳۹/۵-۱۴۹/۵	۱۴۹/۵	۰/۶۲	۰/۷۳۲۴	۷۳/۲	۲۰/۰
۱۴۹/۵-۱۵۹/۵	۱۵۹/۵	۱/۱۶	۰/۸۷۷۰	۸۷/۷	۱۴/۵
۱۵۹/۵-۱۶۹/۵	۱۶۹/۵	۱/۷۰	۰/۹۵۵۴	۹۵/۵	۷/۸
۱۶۹/۵-۱۷۹/۵	۱۷۹/۵	۲/۲۴	۰/۹۸۷۵	۹۸/۷	۳/۲
۱۷۹/۵-۱۸۹/۵	۱۸۹/۵	۲/۷۸	۰/۹۹۷۳	۹۹/۷	۱/۰
۱۸۹/۵-۱۹۹/۵	۱۹۹/۵	۳/۳۲	۰/۹۹۹۵۲	۹۹/۹	۰/۲
۱۹۹/۵ و بیشتر	∞	∞	۱	۱۰۰	۰/۱
مجموع	-	-	-	-	۱۰۰

جدول ۱۵.۷ محاسبه χ^2 با استفاده از فراوانیهای تجدید نظر شده

حد بالا برای X	F_{O_i}	F_{E_i}	$\frac{(F_{O_i} - F_{E_i})^2}{F_{E_i}}$
۱۰۹/۵	۴	۶/۱	۰/۷۲۳
۱۱۹/۵	۱۰	۹/۵	۰/۰۲۶
۱۲۹/۵	۱۹	۱۶/۷	۰/۳۱۷
۱۳۹/۵	۲۱	۲۰/۹	۰/۰۰۰
۱۴۹/۵	۲۳	۲۰/۰	۰/۴۵۰
۱۵۹/۵	۱۱	۱۴/۵	۰/۸۴۵
۱۶۹/۵	۸	۷/۸	۰/۰۰۵
∞	۴	۴/۵	۰/۰۵۶
مجموع	۱۰۰	۱۰۰	۲/۴۲۲

برای محاسبه درجه آزادی، ما باید تعداد محدودیتها را تعیین کنیم. طبق معمول دو محدودیت ناشی از محاسبه $\bar{X}$ و S_x^2 برای تخمین μ_x و σ_x^2 و یک محدودیت نیز برای مساوی شدن مجموع فراوانیهای مورد انتظار با ۱۰۰ از دست خواهد رفت:

$$d.f = 8 - 1 - 2 = 5$$

بنابراین مقدار بحرانی آزمون در سطح خطای ۵ درصد، مساوی ۱۱/۰۷ خواهد شد. از آنجایی که مقدار آماره آزمون ($\chi^2 = 2/422$) کوچکتر از مقدار بحرانی (۱۱/۰۷) است، پس فرضیه صفر؛ $[H_0: X \sim N(138/1, 18/5)]$ در سطح اطمینان ۹۵ درصد تأیید می شود.

مثال ۱۵.۴ آزمون و بررسی مدل پواسون. در این بخش با استفاده از یک مثال مراحل آزمون فرض نیکویی برازش در خصوص توزیع پواسون را تشریح می کنیم. ما داده های جمع آوری شده را در خصوص تعداد اتومبیلهایی که با فاصله پانزده دقیقه از یک بزرگراه می گذرند بررسی می کنیم. برای جمع آوری اطلاعات در یک نقطه ای از بزرگراه تعداد اتومبیلهایی که در ۷۶ موقعیت پانزده

دقیقه‌ای عبور کرده‌اند مشاهده شده است (جدول ۸-۱۵).

جدول ۸-۱۵ جدول فراوانی تعداد اتومبیل‌ها در فواصل ۱۵ دقیقه‌ای

X_i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	مجموع
Fo_i	۱	۴	۸	۶	۱۷	۱۸	۱۳	۳	۳	۱	۱	۱	۰	۷۶

محاسبه فراوانیهای نظری (مورد انتظار) در یک مدل پواسون. اولین قدم محاسبه میانگین فراوانیهای مشاهده شده است. این میانگین، در واقع تخمینی از μ جامعه است که به عنوان میانگین توزیع پواسون برای محاسبه احتمالات مشاهدات استفاده خواهد شد. البته این تخمین موجب کاهش درجات آزادی می‌گردد. میانگین جدول فوق $4/6$ است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱۵-۱۲)

$$\bar{X} = \bar{\lambda} = \frac{\sum Fo_i X_i}{\sum Fo_i} = \frac{349}{76} = 4/6$$

مجدداً تعدادی از فراوانیهای نظری کمتر از ۵ هستند؛ بنابراین قاعده کرامر را در خصوص این طبقات اعمال می‌کنیم. جدول ۱۱-۱۵ نشان‌دهنده فراوانیهای تجدیدنظر شده است.

آزمون معنی‌دار بودن جدول نهایی هفت طبقه با دو محدودیت دارد: اول اینکه مجموع فراوانیهای نظری باید مساوی ۷۶ باشد و دوم؛ مقدار میانگینی که برای محاسبه احتمالات به کمک نمونه برآورد شد؛ بنابراین:

$$d.f = 7 - 1 - 1 = 5$$

مقدار بحرانی χ^2 در سطح معنی‌دار ۵ درصد برابر $11/07$ با درجه آزادی ۵ است. فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 :

$$H_0: X \sim P(4/6)$$

$$H_1: X \neq P(4/6)$$

جدول ۱۵.۹ محاسبه فراوانیهای نظری از یک توزیع پواسون با $\lambda = 4/60$

X_i	$P(X=x_i) = [e^{-4/60} (4/60)^{x_i}] / X_i!$	$Fe_i = 76 \times p(X=x_i)$
۰	= ۰/۰۱۰۰۵	۰/۸.
۱	= ۰/۰۴۶۲	۳/۵
۲	= ۰/۱۰۶۳	۸/۱
۳	= ۰/۱۶۳۱	۱۲/۴
۴	= ۰/۱۸۷۵	۱۴/۳
۵	= ۰/۱۷۲۵	۱۳/۱
۶	= ۰/۱۳۲۳	۱۰/۱
۷	= ۰/۰۸۶۹	۶/۶
۸	= ۰/۰۵۰۰	۳/۸
۹	= ۰/۰۲۵۵	۱/۹
۱۰	= ۰/۰۱۱۸	۰/۹
۱۱ و بیشتر	$1 - P(X \leq 10) = ۰/۰۰۷۸۵$	۰/۵

جدول ۱۵.۱۰ فراوانیهای مشاهده شده و نظری

X_i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱ و بیشتر
Fo_i	۱	۴	۸	۶	۱۷	۱۸	۱۳	۳	۳	۱	۱	۱
Fe_i	۰/۸۰	۳/۵	۸/۱	۱۲/۴	۱۴/۳	۱۳/۱	۱۰/۱	۶/۶	۳/۸	۱/۹	۰/۹۰	۰/۵۰

جدول ۱۵.۱۱ فراوانیهای مشاهده و نظری تجدید نظر شده

X_i	۰, ۱, ۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸ و بیشتر
Fo_i	۱۳	۶	۱۷	۱۸	۱۳	۳	۶
Fe_i	۱۲/۴	۱۲/۴	۱۴/۳	۱۳/۱	۱۰/۱	۶/۶	۷/۱۰

حال با استفاده از رابطه $\chi^2 = \sum \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$ محاسبه می شود که چگونگی محاسبه آن در جدول ۱۵-۱۲ آمده است:

جدول ۱۵.۱۲ محاسبه کای - مربع

X_i	Fo_i	Fe_i	$(Fo_i - Fe_i) / \sqrt{Fe_i}$
۰, ۱, ۲	۱۳	۱۲/۴۰	۰/۰۳
۳	۶	۱۲/۴۰	۳/۳۰
۴	۱۷	۱۴/۳۰	۰/۵۱
۵	۱۸	۱۳/۱۰	۱/۸۳
۶	۱۳	۱۰/۱۰	۰/۸۳
۷	۳	۶/۶۰	۱/۹۶
۸ و بیشتر	۶	۷/۱۰	۰/۱۷
مجموع	۷۶	۷۶	۸/۶۳

χ^2 محاسبه شده کوچکتر از مقدار بحرانی $\chi^2 = 11/07$ است؛ بنابراین می توان ادعا کرد که فرض H_0 (برخوردار بودن عبور ماشینها ۷ و ۰/۰۵ از توزیع پواسون) تأیید می شود. در این مثال ما شدیداً به قاعده فراوانیهای کوچک توجه کردیم به طوری که فراوانیهای نظری کمتر از ۵ را در همدیگر ادغام کردیم. در حالی که این قاعده از انعطاف پذیری معقولی برخوردار است، اهمیت این گفته را به این شرح نشان می دهیم: با تلفیق $X=0$ و $X=1$ ما یک فراوانی نظری $4/3$ را خواهیم داشت و این به آن معنی است که نباید $X=2$ را در صفر و یک ادغام کنیم. همچنین به جای ادغام طبقات $X=8, 9, 10, 11$ فقط طبقات $X=9, 10, 11$ را در همدیگر ادغام می کنیم که فراوانی نظری $3/3$ را به دست می دهد. خلاصه آنکه حاصل این ترکیبات جدید جدول ۱۵-۱۳ خواهد شد:

جدول ۱۵.۱۳ فراوانیهای مورد انتظار و مشاهده شده

x_i	۰, ۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹, ۱۰, ۱۱
Fo_i	۵	۸	۶	۱۷	۱۸	۱۳	۳	۳	۳
Fe_i	۴/۳	۸/۱	۱۲/۴	۱۴/۳	۱۳/۱	۱۰/۱	۶/۶	۳/۸	۳/۳۰

این ترتیب جدید دو طبقه بیشتر (و همچنین دو درجه آزادی بیشتر) از روش قبلی به دست می دهد؛ یعنی:

$$d.f = 9 - 2 = 7$$

مقدار بحرانی کای - مربع در سطح خطای ۵ درصد برابر $14/07$ است. مقدار χ^2 در جدول ۱۵-۱۳ برابر $8/75$ خواهد شد (فقط ۱۰ درصد با کای - مربع جدول ۱۵-۱۲ تفاوت دارد). با این وجود اضافه شدن دو طبقه باعث شده است که مقدار بحرانی کای - مربع به $14/07$ افزایش یابد (این مقدار با مقدار $11/07$ مقایسه کنید). نتیجه آنکه محاسبه کای - مربع براساس فراوانیهای مورد انتظار ۳، ۴ یا ۵ شدیداً مقدار بحرانی کای - مربع را تحت تأثیر قرار می دهد که باعث می شود فرض H_0 را بسختی رد کرده یا بپذیریم. در حالی که تأثیر قواعد فوق بر مقدار آماره آزمون اندک خواهد بود.

مثال ۱۵-۵ تولید اعداد تصادفی. یکی از کاربردهای آزمون نیکویی برازش پاسخ به این سؤال است که «آیا داده های تصادفی تولید شده از توزیع خاصی برخوردارند یا خیر؟» ما برای نشان دادن کاربرد توضیح کای - مربع در این زمینه به بررسی توزیع یکنواخت طی این مثال می پردازیم:

جدول ۱۵-۱۴ نشان دهنده وضعیت خلاصه شده صد عدد تصادفی است که به کمک کامپیوتر تولید شده اند. حال این سؤال مطرح است که «آیا اعداد تولید شده از یک توزیع یکنواخت حاصل شده اند؟» برای بررسی این توزیع می توان به بررسی

جدول ۱۵-۱۴ جدول فراوانی مطلق هر یک از اعداد تصادفی

اعداد تصادفی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	جمع
فراوانی مطلق	۱۳	۸	۱۲	۱۱	۱۰	۵	۷	۱۱	۱۱	۱۲	$\Sigma = 100$

فرضیه های زیر پرداخت:

$$\begin{cases} H_0: \text{اعداد تصادفی فوق از یک توزیع یکنواخت تولید شده اند} \\ H_1: \text{اعداد تصادفی فوق از یک توزیع یکنواخت تولید نشده اند} \end{cases}$$

برای محاسبه آماره آزمون باید اختلاف بین فراوانیهای مشاهده شده (F_{O_i}) و فراوانیهای مورد انتظار (F_{E_i}) محاسبه شود. چون مقادیر منفی و مثبت تفاضل ($F_{E_i} - F_{O_i}$) همدیگر را خنثی می کنند پس مجموع اختلاف بین آنها برابر صفر است. برای غلبه بر چنین معضلی لازم است از مجذور تفاضل دو فراوانی استفاده شود. در مثال ما هر یک

از فراوانیهای مورد انتظار با همدیگر برابرند ولی این امر همیشه صادق نیست. اگر چنانچه آزمون را به کمک مجموع مربعات تفاوتها برگزار کنیم، پس باید به اختلافات مشابه از یک فراوانی مورد انتظار کوچکتر اهمیت بیشتری داده و به همان اختلاف مشابه از یک فراوانی مورد انتظار بزرگتر اهمیت کمتری بدهیم (برای مثال یک اختلاف ۵ تایی زمانی که فراوانی مورد انتظار ۱۰ است باید با اهمیت تراز وقتی باشد که ۱۰۰ است).

یکی از روشهای در نظر گرفتن چنین امری تقسیم کردن مربع اختلافات بر فراوانیهای مورد انتظار هر طبقه (مقوله) است؛ بنابراین آماره آزمون مورد نظر ما به شرح زیر فراهم می آید:

$$\chi^2 = \sum \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} \quad (10.13)$$

هرچه اختلاف بین فراوانیهای مورد انتظار و مشاهده شده بیشتر باشد مقدار χ^2 بیشتر خواهد شد.

جدول ۱۰.۱۵ محاسبه آماره آزمون در مثال تولید اعداد تصادفی

اعداد تصادفی	Fo_i	$Fe_i = n \times \frac{1}{10}$	$(Fo_i - Fe_i)^2$	$\frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$
۰	۱۳	۱۰	۹	۰/۹۰
۱	۸	۱۰	۴	۰/۴۰
۲	۱۲	۱۰	۴	۰/۴۰
۳	۱۱	۱۰	۱	۰/۱۰
۴	۱۰	۱۰	۰	۰/۰۰
۵	۵	۱۰	۲۵	۲/۵۰
۶	۷	۱۰	۹	۰/۹۰
۷	۱۱	۱۰	۱	۰/۱۰
۸	۱۱	۱۰	۱	۰/۱۰
۹	۱۲	۱۰	۴	۰/۴۰
	۱۰۰	۱۰۰		$\Sigma = ۵/۸$

واضح است که مجموعه‌های متفاوت صدتایی از اعداد تصادفی معمولاً مقادیر متفاوتی برای χ^2 ارائه خواهد داد. ما باید توزیع همه مقادیر این آماره

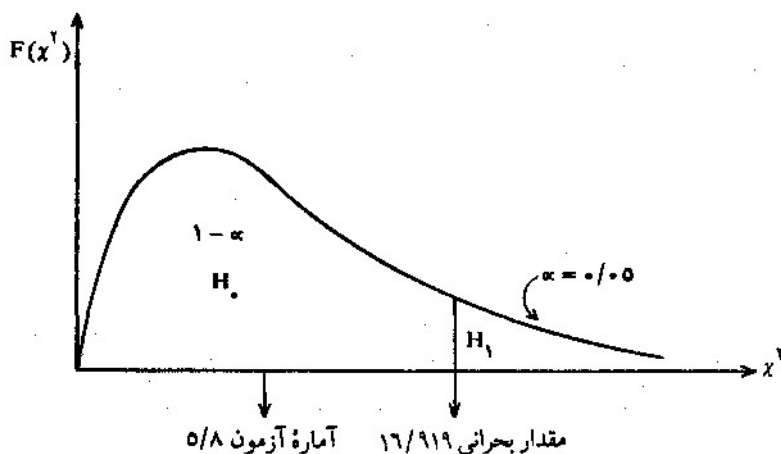
آزمون را براساس مجموعه‌های صدتایی ممکن از اعداد تصادفی پیدا کنیم؛ اما این امر ضرورتی ندارد، چون توزیع χ^2 محاسبه شده بسیار نزدیک به توزیع نظری کای - مربع است. برای هر توزیع کای - مربع تعداد درجات آزادی نشان‌دهنده استقلال در تخصیص فراوانیهای مورد انتظار است. در مثال ما ۱۰ فراوانی مورد انتظار وجود دارد که فقط در ۹ تای آنها استقلال وجود دارد و دهمی باید به گونه‌ای انتخاب شود که مجموع فراوانیهای مورد انتظار صد شود. این حقیقت که مجموع فراوانیهای مورد انتظار باید به مجموع فراوانیهای تجربی برابر گردد، خود محدودیتی را ایجاد می‌کند. محاسبه درجات آزادی بدین صورت است:

$$d.f = (\text{تعداد محدودیتها}) - (\text{تعداد طبقات})$$

بنابراین:

$$d.f = 10 - 1 = 9$$

پس مقدار آماره آزمون برای مثال ما مساوی ۵/۸ است. حال باید دید که مقدار کای - مربع با ۹ درجه آزادی، چقدر است؟ براساس مقدار $\alpha = 0/05$ و درجه آزادی ۹ مقدار بحرانی کای - مربع از جدول پیوست مساوی با ۱۶/۹۱۹ است؛ بنابراین در سطح اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت که فرض H_0 که دلالت بر یکنواخت بودن اعداد تصادفی دارد پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان دید که:



۱۵-۶ اصلاح یتس^۱

فراوانیهای مورد انتظار در آزمونهای کای-مربع (بخصوص جداول توافقی) گسسته است؛ بنابراین آماره آزمون، شاخص آماری گسسته را ارائه می‌دهد که آن را با توزیع کای-مربع که پیوسته است تقریب می‌زنند. یتس در سال ۱۹۳۴ شیوه‌ای را به منظور اصلاح چنین موردی در آزمونهای کای-مربع که یک درجه آزادی دارند، پیشنهاد کرده است. براساس اصلاح یتس، چنانچه مقدار درجه آزادی مساوی یک باشد، به جای استفاده از آماره آزمون معمول کای-مربع باید از این رابطه برای محاسبه آماره آزمون استفاده کرد:

$$\chi^2_{\text{اصلاح شده}} = \sum \frac{(|F_{oi} - F_{ei}| - 0.5)^2}{F_{ei}} \quad (15-14)$$

چنانکه واضح است در این رابطه باید از قدر مطلق تفاضل فراوانیهای مشاهده شده و مورد انتظار نیم واحد کم کرده و سپس به توان دو رساند. بدین ترتیب آماره آزمون به واقع نزدیکتر خواهد شد.

تمرین

۱. یک دانشجوی کارشناسی ارشد در پایان‌نامه خود ادعا کرده است که «توزیع مدیران در سازمان مورد تحقیق یکنواخت^۲ نیست. نتایج حاصل از نمونه‌وی از سه سطح مدیریت به این شرح است:

سطح مدیریت	عملیاتی	میان	عالی
تعداد مدیران	۴۴۰	۳۶۰	۱۰۰

آیا می‌توان در سطح معنی‌دار ۵ درصد ادعای وی را پذیرفت؟ نتایج مدیریتی رد یا قبول این فرضیه را تحلیل کنید.

۲. ادعا شده که تعداد تصادفات منجر به مرگ در ایران از توزیع بواسون برخوردار است. برای بررسی این ادعا از پنجاه شهر ایران به طور هفتگی اطلاعاتی جمع‌آوری شده‌است. نتایج جمع‌آوری داده‌ها در جدول زیر آمده است:

تصادفات منجر به مرگ	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد شهر	۵	۱۵	۱۲	۱۳	۵

نسبت اشغال شده	تعداد بیمارستان	در سطح خطای یک درصد آیا می توان ادعای فوق را پذیرفت. چرا؟
۴۰ و کمتر	۱۶	۳. یک گروه تحقیقاتی مطالعاتی را در خصوص ظرفیت اشغال شده (به درصد) بیمارستانهای کشور برنامه ریزی کرده است. تصور بر این است که ظرفیت اشغال شده بیمارستانها از توزیع نرمال؛ $[X \sim N(69/91, 19/02)]$ ، برخوردار است. از ۲۵۰ بیمارستان در سطح کشور که به طور تصادفی انتخاب شده، داده های ۱۲ ماهه به دست آمده است که به این صورت طبقه بندی شده اند:
۴۰-۵۰	۱۸	
۵۰-۶۰	۲۲	
۶۰-۷۰	۵۱	
۷۰-۸۰	۶۲	
۸۰-۹۰	۵۵	
۹۰-۱۰۰	۲۲	
۱۰۰-۱۱۰	۴	

آیا نمونه به دست آمده صحت تصور بالا را تأیید می کند؟ ($\alpha = 0/01$).

۱۵-۷ خلاصه

در این فصل درباره استفاده های متنوع توزیع کای-مربع و آزمونهای استقلال و همگنی بحث شد. گرچه آزمونها از نظر ریاضی معادل یکدیگرند، از نظر مفهومی با هم فرق دارند. شیوه بررسی به محاسبه شاخص آماری به این صورت می انجامد:

$$\chi^2 = \sum \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$$

شاخص فوق، تفاوت بین فراوانیهای مشاهده شده (Fo_i) و مورد انتظار (Fe_i) وقوع مقادیر را در طبقات مجزا از هم اندازه می گیرد. چنانچه آماره فوق کوچکتر یا مساوی مقدار بحرانی، $\chi^2_{\alpha, d.f.}$ باشد، فرض H_0 پذیرفته خواهد شد؛ در غیر این صورت در سطح خطای مورد نظر رد می شود.

همچنین در فصل حاضر، آزمون نیکویی برازش برای تعیین نوع توزیع جامعه آماری تشریح شده و آزمونهای برازش برای توزیع نرمال، پواسون و یکنواخت ارائه شد.

آزمونهای مزبور به ترتیب استقلال دو متغیر و همگنی نسبتها را در میان دو گروه یا بیشتر و برازش داده های مشاهده شده را با داده های نظری بررسی می کنند.

۱۵-۸ سؤالات و مسائل

سؤالات دو گزینه‌ای

۱. آزمون استقلال کای - مربع یک آزمون دو دانه است. ☐ ص ☐ غ
۲. جدول توافقی آزمون استقلال کای - مربع دو حاشیه تصادفی دارد. ☐ ص ☐ غ
۳. جدول توافقی آزمون همگونی کای - مربع یک حاشیه تصادفی دارد. ☐ ص ☐ غ
۴. در آزمون استقلال کای - مربع، H_0 نشان دهنده صفر بودن کوواریانس γ است. ☐ ص ☐ غ
۵. اصلاح یتس صرفاً برای جداول توافقی 2×2 در آزمون استقلال است. ☐ ص ☐ غ
۶. اگر فراوانی مشاهده شده یک طبقه کمتر از ۵ باشد، آن طبقه حتماً در طبقه مجاور ادغام می‌شود. ☐ ص ☐ غ
۷. آزمون همگونی یک نوع آزمون تساوی نسبت‌هاست. ☐ ص ☐ غ
۸. آزمون استقلال کای - مربع فقط وقتی به کار می‌رود که هر دو متغیر کیفی هستند. ☐ ص ☐ غ
۹. هرچه تفاوت فراوانیهای مشاهده شده و انتظاری کمتر باشد، احتمال پذیرش H_0 بیشتر است. ☐ ص ☐ غ
۱۰. در آزمون نیکویی برازش، H_0 نشان دهنده نوع توزیع مورد نظر است. ☐ ص ☐ غ

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱۱. درجه آزادی یک توزیع کای - مربع ۵ است. میانگین و واریانس آن از چپ به راست کدام است؟

(الف) (۵, ۵)	(ج) (۱۰, ۱۰)
(ب) (۱۰, ۵)	(د) (۵, ۱۰)
۱۲. یک جدول توافقی با ۳ ردیف و ۴ ستون وجود دارد. تعداد درجات آزادی آن کدام است؟

(الف) ۲	(ج) ۶
(ب) ۳	(د) ۱۲
۱۳. مقدار آماره آزمون $8/35$ است. اگر حالتیهای زیر نشان دهنده مقادیر بحرانی در سطح α های مختلف باشد. در چه صورتی H_0 رد می‌شود.

(الف) $7/779$	(ج) $11/143$
(ب) $9/488$	(د) $13/277$
۱۴. آزمون نیکویی برازش کدام یک از آزمونهای زیر است؟

(الف) یک دنباله چپ	(ج) دو دنباله
(ب) یک دنباله راست	(د) به تعریف H_0 و مقدار α بستگی دارد.

۱۵. مقادیر $F_{0.1}$ و $F_{0.5}$ به این صورت تعریف شده است:

$F_{0.1}$	۵	۱۰	۸	۷
$F_{0.5}$	۵	۸	۹	۸

مقدار آماره آزمون کدام است؟

- الف) $1/254$ (ج) $0/251$
ب) $2/753$ (د) $0/736$

۱۶. در سؤال ۱۵ اگر H_0 نشان دهنده توزیع یکساخت باشد، تعداد درجات آزادی چقدر است؟

- الف) ۴ (ج) ۳
ب) ۲ (د) ۱

۱۷. جدول توافقی آزمون همگونی کدام یک از جدولهای زیر است.

- الف) جدولی با یک کناره ردیفی ثابت (ج) جدولی با یک کناره ثابت
ب) جدولی با یک کناره ستونی ثابت (د) جدولی با دو کناره ثابت

۱۸. تعداد طبقات، در یک آزمون نیکویی برازش، ۱۰ تاست که در آن μ_x و σ_x^2 برآورد شده‌اند. تعداد درجات آزادی این آزمون چقدر است؟

- الف) ۷ (ج) ۹
ب) ۸ (د) ۱۰

۱۹. برای آزمون فرضیه $H_0: p_1 = p_2$ ، مقدار آماره آزمون عبارت است از: $Z = -2/70$. مقدار χ^2_{α} در آزمون همگونی کای - مربع چقدر است؟

- الف) $2/70$ (ج) $7/29$
ب) $-2/70$ (د) $10/14$

۲۰. ادعا شده که توزیع تصادفات در سطح شهر از توزیع پواسون برخوردار است. در آزمون این ادعا چند پارامتر برآورد خواهد شد؟

- الف) ۳ (ج) ۱
ب) ۲ (د) صفر

مسائل

۲۱. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «بین تحصیل و درآمد ارتباط وجود دارد.» برای بررسی این فرضیه یک نمونه تصادفی به تعداد ۳۰۰ نفر انتخاب شده‌است. جدول زیر

نشان‌دهنده اطلاعات به دست آمده از نمونه است:

سطوح تحصیل درآمد (برحسب هزار تومان)	پایین	متوسط	بالا
۲۰-۳۰	۹۰	۶۰	۵۰
۳۰-۴۰	۱۰	۲۰	۳۰
۴۰ و بالاتر	۰	۱۰	۳۰

آزمون مناسب را برای بررسی فرضیه فوق در سطح خطای ۲ درصد برگزار کنید.

۲۲. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «نظرات یکسانی در سطوح عملیاتی، میانی و عالی نسبت به برقراری سیستم اطلاعاتی مدیریت (MIS) وجود دارد.» برای بررسی این فرضیه از هر گروه یک نمونه تصادفی انتخاب شده که کیفیت نظرات آنها به تفکیک در جدول زیر آمده است:

کیفیت نظرها سطح مدیریت	غیرموافق	موافق
عملیاتی	۵۰	۲۰۰
میانی	۲۰	۱۸۰
عالی	۱۰	۶۰

آزمون مناسب را در سطح خطای ۵ درصد برای بررسی فرضیه فوق برگزار کنید.

۲۳. از یک جامعه روستایی ۵۰ نفر را به طور تصادفی انتخاب کرده‌اند که ۴۰ نفر آنها باسواد هستند. آیا می‌توان نسبت افراد باسواد را در روستا مساوی ۷۴ درصد دانست. آزمون مناسب کای-مربع را در سطح خطای یک درصد به برگزار کنید.

۲۴. فرض کنید ۴ سکه را ۱۶۰ مرتبه پرتاب کرده‌اند. در نتیجه اطلاعات زیر که بیان‌کننده تعداد خطاها در ۱۶۰ پرتاب است به دست آمده است:

تعداد خط	۰	۱	۲	۳	۴
فراوانی	۱۷	۵۲	۵۴	۳۱	۶

آیا می‌توان در سطح اطمینان ۹۵ درصد ادعا کرد که دست کم یکی از سکه‌ها غیرهمطراز است؟

۲۵. ادعا شده است که عمر لامپهای تولیدی کارخانه از توزیع نمایی برخوردار است. بدین منظور

طول عمر یک نمونه تصادفی ۵۰۰ تایی در جدول زیر طبقه‌بندی شده است:

حدود طبقات (برحسب هزار ساعت)	۰-۵	۵-۱۰	۱۰-۱۵	۱۵-۲۰	۲۰-۲۵
فراوانی	۱۸۰	۱۲۰	۱۰۰	۸۰	۲۰

آزمون مناسب را در سطح خطای یک درصد برگزار کنید.

۲۶. ادعا شده که نرخ شکست کامپیوترهای سایت دانشگاه در طول هفته از توزیع پواسون برخوردار است. بدین منظور نرخ شکست آنها در طول ۴۰ هفته به طور تصادفی شمارش شده است که حاصل آن در این جدول آمده است:

تعداد خرابی	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد هفته	۸	۱۰	۱۲	۶	۴

صحت ادعای فوق را در سطح خطای ۲ درصد بررسی کنید.

میزان دستمزد (برحسب هزار تومان)	فراوانی	۲۷. ادعا شده که دستمزد ماهانه کارگران کارخانه از توزیع نرمال برخوردار است؛ یعنی میانگین آن ۲۵ هزار تومان و انحراف معیارش ۱۰ هزار تومان است. برای بررسی صحت این ادعا نمونه‌ای تصادفی مرکب از ۱۰۰ کارگزار سطح کارخانه انتخاب شده که میزان دستمزد ماهانه آنها در این جدول خلاصه شده است:
۱۰ و کمتر	۱۰	
۱۰-۲۰	۳۰	
۲۰-۳۰	۴۰	
۳۰-۴۰	۱۵	
۴۰ و بیشتر	۵	

با توجه به داده‌های نمونه، آیا می‌توان ادعا را در سطح اطمینان ۹۹ درصد پذیرفت؟ آزمون مناسب را برگزار کنید.

۲۸. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «بین نوع آزمون شخصیت و کیفیت کار کارمندان ارتباط وجود دارد.» برای بررسی فرضیه یک نمونه تصادفی از بین کارمندان انتخاب شده که نتیجه آن در جدول زیر آمده است:

نوع آزمون شخصیت \ کیفیت کار	الف	ب
بالا	۲۰	۳۰
متوسط	۴۰	۱۰
پایین	۲۵	۱۵

صحت فرضیه را با استفاده از داده‌های نمونه در سطح خطای ۲ درصد بررسی کنید.

۲۹. فرضیه‌ای به این صورت تدوین شده است: «دوره‌های آموزشی شبانه، روزانه و ضمن خدمت نقطه نظرهای یکسانی نسبت به کیفیت آموزشی رشته مدیریت دارند.» برای بررسی این فرضیه از هر گروه یک نمونه تصادفی انتخاب شده و از آنها مصاحبه به عمل آمده است. حاصل مصاحبه بدین ترتیب است:

کیفیت آموزشی دوره آموزشی			
	خوب	متوسط	ضعیف
شبانه	۳۰	۲۰	۱۰
روزانه	۱۰۰	۴۰	۳۰
ضمن خدمت	۵۰	۱۵	۵

صحت فرضیه را در سطح خطای ۵ درصد آزمون کنید.

پاسخنامه سؤالات

۱) غ	۲) ص	۳) ص	۴) ص
۵) غ	۶) غ	۷) ص	۸) غ
۹) ص	۱۰) ص	۱۱) د	۱۲) ج
۱۳) الف	۱۴) ب	۱۵) د	۱۶) ج
۱۷) ج	۱۸) الف	۱۹) ج	۲۰) ج