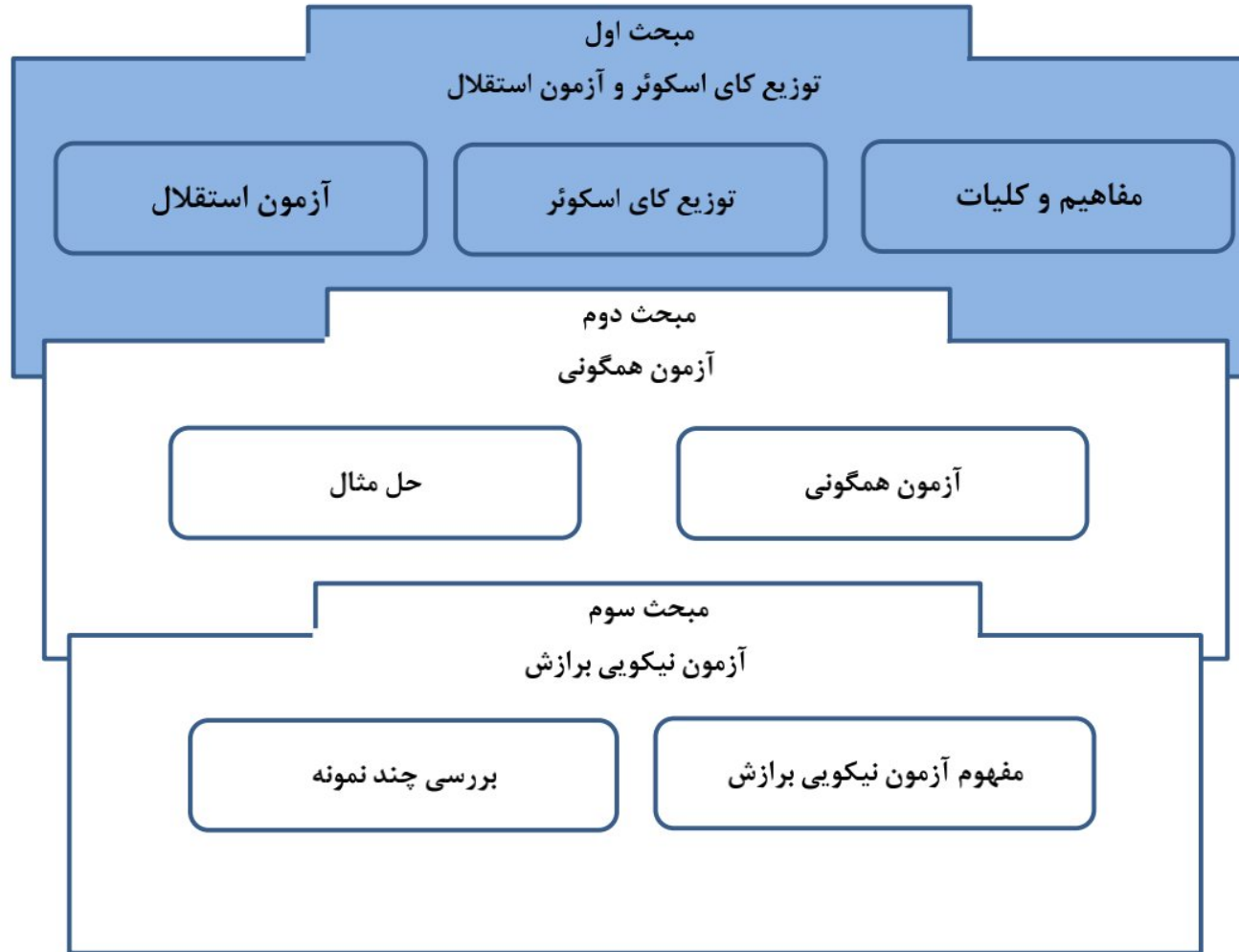




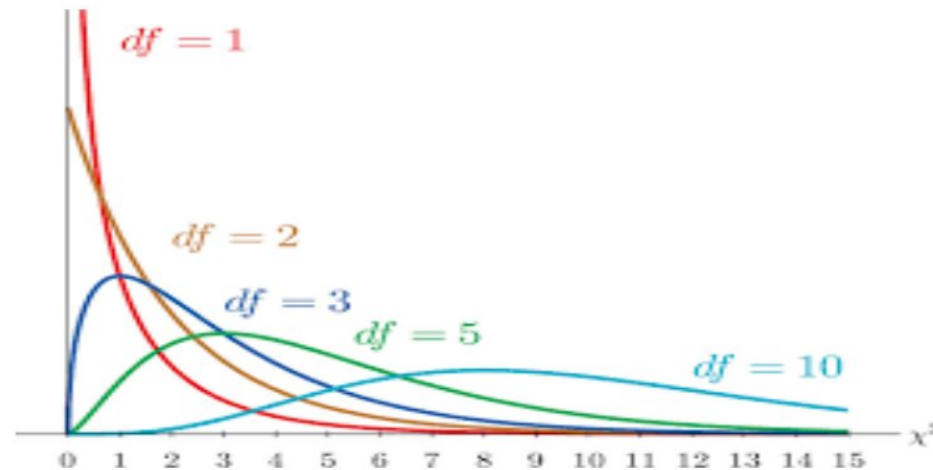
فصل دوم: توزیع کای اسکوتر و تجزیه و تحلیل فراوانی‌ها



مبحث اول

اگر $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد باشند، آنگاه توزیع متغیر تصادفی $Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$ را یک توزیع کای اسکوئر با n درجه آزادی می‌گویند و با χ_n^2 نمایش می‌دهند.

$$f(u) = \frac{1}{(\frac{k}{2}-1)!} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} u^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2}}, u > 0$$



کاربردهای آزمون کای اسکوتر / ویژگی‌های آزمون کای اسکوتر

توزیع کای اسکوتر دارای میانگین k و واریانس $2k$ است. $E(\chi^2) = k$, $V(\chi^2) = 2k$

اگر S^2 واریانس یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب شده از جامعه‌ای نرمال با واریانس σ^2 باشد، در این صورت:

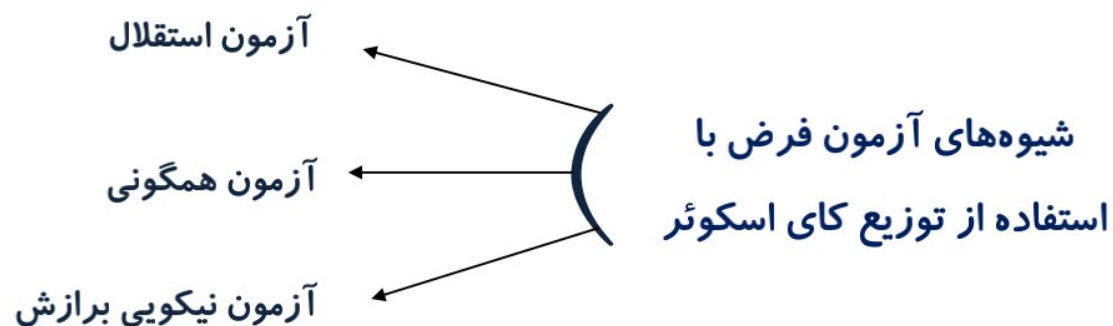
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

که دارای $k=n-1$ درجه آزادی است.

شکل کلی توزیع کای اسکوتر به صورت $\frac{kS^2}{\sigma^2}$ است.

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / ویژگی‌های آزمون کای اسکوئر

از توزیع کای اسکوئر برای آزمون فرضیه‌هایی که داده‌های مورد نظر به صورت فراوانی ارائه شده‌اند، می‌توان استفاده نمود.



کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون استقلال

متداول ترین استفاده از توزیع کای اسکوئر، بررسی وجود استقلال بین دو متغیر کیفی (طبقه‌ای) است. اگر توزیع یک متغیر بدون توجه به توزیع متغیر دیگری رخ دهد، آن دو متغیر مستقل از هم تلقی می‌شوند.

متغیر اول	۱	۲	...	C	مجموع
۱	n_{11}	n_{12}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
۲	n_{21}	n_{22}	...	n_{2c}	$n_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
مجموع	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.c}$	n

طبقه‌بندی داده‌ها بر اساس دو متغیر مورد نظر و بر مبنای یک نمونه n تایی از جامعه هدف، صورت می‌پذیرد که در یک جدول توافقی خلاصه می‌شوند.

در آزمون استقلال، فراوانی‌های مشاهده شده با فراوانی‌های مورد انتظار استقلال دو متغیر مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

کاربردهای آزمون کای اسکوتر / آزمون استقلال

متغیر اول	۱	۲	...	C	مجموع
۱	n_{11}	n_{12}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
۲	n_{21}	n_{22}	...	n_{2c}	$n_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
مجموع	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.c}$	n

n_{ij} : فراوانی مشاهده شده در هر سلول. (سطر i و ستون j)

$n_{i.}$: جمع سطر i.

$n_{.j}$: جمع ستون j.

Fe_i : فراوانی مورد انتظار سلول i.

$$Fe_i = \frac{(n_{i.} * n_{.j})}{n}$$

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون استقلال

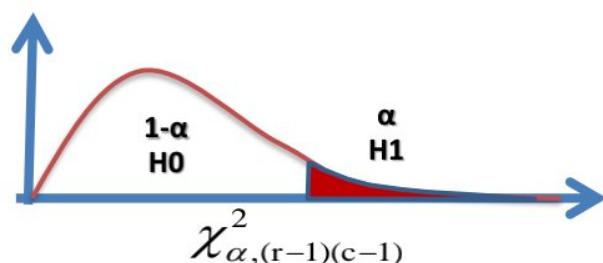
با مقایسه بین فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های مورد انتظار، می‌توان نتیجه گرفت که آیا دومتغیر مستقل از همدیگر هستند یا خیر.

اگر تفاوت فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های مورد انتظار، کوچک باشد، فرض H_0 پذیرفته می‌شود. تصمیم‌گیری در مورد کوچکی و بزرگی تفاوت‌های مشاهده شده بر اساس آماره آزمون صورت می‌پذیرد.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$$

H_0 : دو متغیر مستقل از همدیگر هستند.

H_1 : دو متغیر مستقل نیستند.



درجه آزادی χ^2 در این آزمون برابر با $(r-1)(c-1)$ است.

برای بررسی فرضیه زیر، نمونه‌ای ۱۸۰ نفره از بین کارمندان به صورت تصادفی استخراج شده و میزان عملکرد و رضایت شغلی آن‌ها اندازه‌گیری شده است. در سطح خطای ۵٪ فرضیه مربوطه را بررسی کنید.

"بین عملکرد کارمندان و میزان رضایت شغلی آن‌ها ارتباط وجود دارد"

سطح رضایت شغلی		بالا	متوسط	پایین	مجموع
سطح عملکرد	خوب	۱۸	۲۰	۷	۴۵
	متوسط	۱۵	۳۷	۳۸	۹۰
	ضعیف	۷	۲۳	۱۵	۴۵
مجموع		۴۰	۸۰	۶۰	۱۸۰

H_0 : بین عملکرد و رضایت شغلی کارکنان ارتباط وجود ندارد.

H_1 : بین عملکرد و رضایت شغلی کارکنان ارتباط وجود دارد.

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون استقلال / مثال

سطح رضایت شغلی		بالا		متوسط		پایین		مجموع
		Fo	Fe	Fo	Fe	Fo	Fe	
سطح عملکرد	خوب	۱۸	۱۰	۲۰	۲۰	۷	۱۵	۴۵
	متوسط	۱۵	۲۰	۳۷	۴۰	۳۸	۳۰	۹۰
	ضعیف	۷	۱۰	۲۳	۲۰	۱۵	۱۵	۴۵
مجموع		۴۰		۸۰		۶۰		۱۸۰

H_0 : بین عملکرد و رضایت شغلی کارکنان ارتباط وجود ندارد.

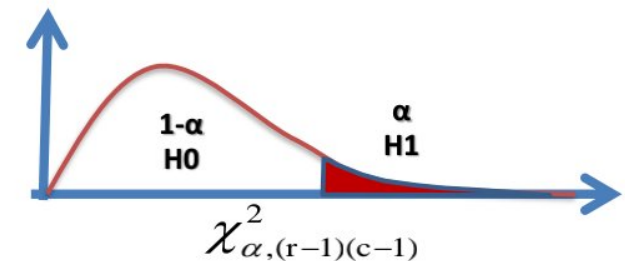
H_1 : بین عملکرد و رضایت شغلی کارکنان ارتباط وجود دارد.

$$Fe_i = \frac{(n_{i.} * n_{.j})}{n}$$

$$Fe_1 = \frac{(n_{1.} * n_{.1})}{n} = \frac{(45 * 40)}{180} = 10$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} = \frac{(18 - 10)^2}{10} + \frac{(20 - 20)^2}{20} + \frac{(7 - 15)^2}{15} + \dots + \frac{(23 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 15)^2}{15} = 15.625$$

$$\chi_{\alpha, (r-1)(c-1)}^2 = \chi_{0.05, (3-1)(3-1)}^2 = \chi_{0.05, 4}^2 = 9.488$$



تمرین ۴ صفحه ۸۴ کتاب

سواد پدر	تعداد فرزندان			جمع کل
	۰-۱	۲-۳	۳ >	
بی سوار	۱۸۲ 201.6	۲۱۵ (210.6)	۲۰۳ 187.8	۶۰۰
باسوار	۱۵۴ 134.4	۱۳۶ 140.4	۱۱۰ 125.2	۴۰۰
	۳۳۶	۳۵۱	۳۱۳	۱۰۰۰

$$\alpha = 0.05$$

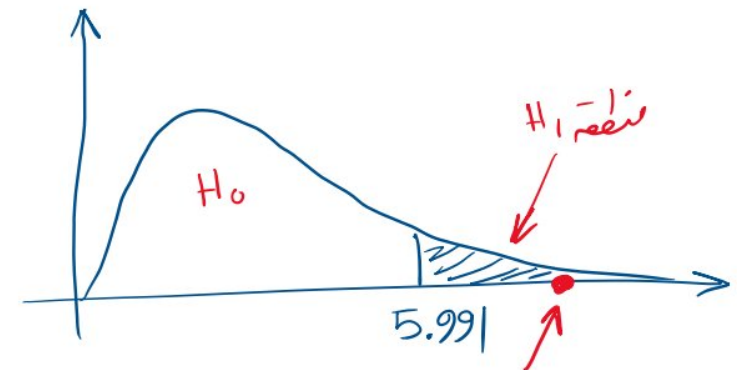
سوال: آیا تعداد فرزندان مستقل از تعداد سوار است؟
 H_0

H_1 : نیستند ✓

$$\chi^2 = \sum \frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}} = \frac{(182 - 201.6)^2}{201.6} + \frac{(215 - 210.6)^2}{210.6} + \frac{(203 - 187.8)^2}{187.8} + \dots$$

$$+ \frac{(110 - 125.2)^2}{125.2} = 8.066$$

$$\chi^2_{(2-1)(3-1), 0.05} = \chi^2_{2, 0.05} = 5.991$$



فرضیه‌ای به این صورت مطرح شده است. "بین سطح بلوغ و شیوه رهبری مدیران ارتباط وجود دارد."

به منظور بررسی این فرضیه، سطح بلوغ و شیوه رهبری ۲۴۰ مدیر از مدیران کشور اندازه‌گیری شده و در جدول زیر خلاصه شده است. در سطح خطای ۱٪ صحت فرضیه فوق را بررسی کنید.

سطح بلوغ		M_1	M_2	M_3	M_4
شیوه رهبری	S_1	۲۰	۱۵	۱۰	۵
	S_2	۱۸	۱۵	۱۵	۱۲
	S_3	۵	۱۰	۲۰	۳۵
	S_4	۰	۵	۱۵	۴۰

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون استقلال / مثال

H_0 : بین سطح بلوغ و شیوه رهبری مدیران ارتباط وجود ندارد.
 H_1 : بین سطح بلوغ و شیوه رهبری مدیران ارتباط وجود دارد.

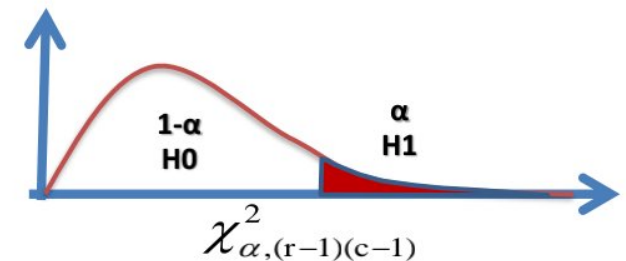
$$Fe_i = \frac{(n_{i.} * n_{.j})}{n}$$

$$Fe_1 = \frac{(n_{1.} * n_{.1})}{n} = \frac{(50 * 43)}{240} = 8.958$$

سطح بلوغ		M_1		M_2		M_3		M_4		مجموع
		Fo	Fe	Fo	Fe	Fo	Fe	Fo	Fe	
شیوه رهبری	S_1	۲۰	۸.۹۵۸	۱۵	۹.۳۷۵	۱۰	۱۲.۵	۵	۱۹.۱۷	۵۰
	S_2	۱۸	۱۰.۷۵	۱۵	۱۱.۲۵	۱۵	۱۵	۱۲	۲۳	۶۰
	S_3	۵	۱۲.۵۴	۱۰	۱۳.۱۳	۲۰	۱۷.۵	۳۵	۲۶.۸۳	۷۰
	S_4	۰	۱۰.۷۵	۵	۱۱.۲۵	۱۵	۱۵	۴۰	۲۳	۶۰
مجموع		۴۳		۴۵		۶۰		۹۲		۲۴۰

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} = \frac{(20 - 8.958)^2}{8.958} + \frac{(15 - 9.375)^2}{9.375} + \frac{(10 - 12.5)^2}{12.5} + \dots + \frac{(15 - 15)^2}{15} + \frac{(40 - 23)^2}{23} = 74.27$$

$$\chi^2_{\alpha, (r-1)(c-1)} = \chi^2_{0.01, (4-1)(4-1)} = \chi^2_{0.01, 9} = 21.666$$



کاربردهای آزمون کای اسکوئر / محاسبه ضریب توافقی با استفاده از مقدار کای اسکوئر

- در آزمون استقلال دو صفت (متغیر)، اگر فرض H_0 در مقابل H_1 رد شود، آنگاه نتیجه می شود که بین دو صفت ارتباط وجود دارد.

H_0 : دو متغیر مستقل از همدیگر هستند.

H_1 : دو متغیر مستقل نیستند.

- میزان ارتباط را که معمولاً به ضریب توافقی معروف است، با استفاده از فرمول زیر محاسبه می شود.

$$C = \sqrt{\frac{\chi_0^2}{\chi_0^2 + n}}$$

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / محاسبه ضریب توافقی با استفاده از مقدار کای اسکوئر / مثال

سطوح شغلی ۳۰۰ نفر از کارکنان در سه شیفت کاری مختلف بررسی و در جدول زیر آورده شده است.

آیا در سطح ۹۹ درصد می توان گفت که شیفت های کاری مستقل از سطوح شغلی هستند؟

ضریب توافقی را محاسبه و تفسیر نمایید.

سطوح شغلی	شیفت کاری			جمع
	۱	۲	۳	
کارکنان اداری	۱۳	۹	۲۰	۴۲
کارکنان متخصص	۵۰	۳۹	۱۹	۱۰۸
کارکنان معمولی	۵۷	۵۲	۴۱	۱۵۰
جمع	۱۲۰	۱۰۰	۸۰	۳۰۰

H_0 : شیفت های کاری مستقل از سطوح شغلی است.

H_1 : شیفت های کاری مستقل از سطوح شغلی نیست.

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / محاسبه ضریب توافقی با استفاده از مقدار کای اسکوئر / مثال

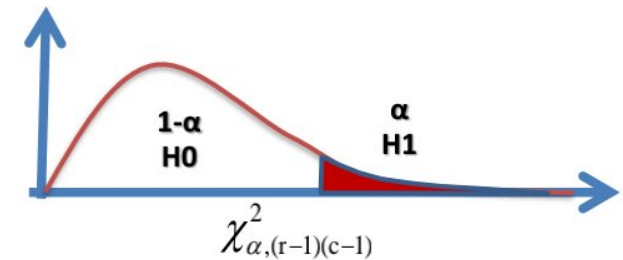
شیفت کاری		۱		۲		۳		مجموع
		Fo	Fe	Fo	Fe	Fo	Fe	
سطوح شغلی	کارکنان اداری	۱۳	۱۶.۸	۹	۱۴	۲۰	۱۱.۲	۴۲
	کارکنان متخصص	۵۰	۴۳.۲	۳۹	۳۶	۱۹	۲۸.۸	۱۰۸
	کارکنان معمولی	۵۷	۶۰	۵۲	۵۰	۴۱	۴۰	۱۵۰
مجموع		۱۲۰		۱۰۰		۸۰		۳۰۰

$$Fe_i = \frac{(n_{i.} * n_{.j})}{n}$$

$$Fe_1 = \frac{(n_{1.} * n_{.1})}{n} = \frac{(120 * 42)}{300} = 16.8$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} = \frac{(13 - 16.8)^2}{16.8} + \frac{(9 - 14)^2}{14} + \frac{(20 - 11.2)^2}{11.2} + \dots + \frac{(52 - 50)^2}{50} + \frac{(41 - 40)^2}{40} = 14.47$$

$$\chi_{\alpha, (r-1)(c-1)}^2 = \chi_{0.01, (3-1)(3-1)}^2 = \chi_{0.01, 4}^2 = 13.277$$



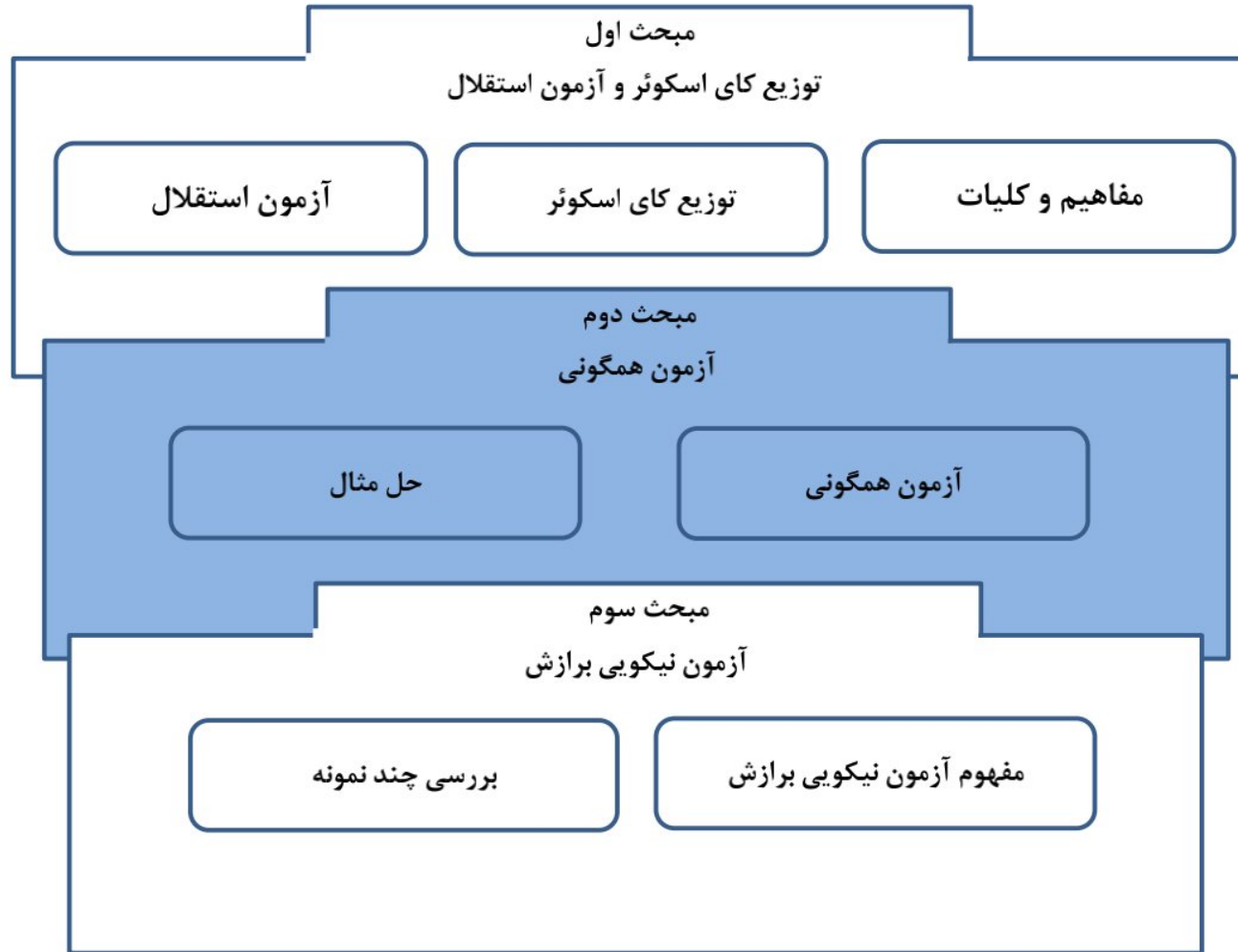
$$C = \sqrt{\frac{\chi_0^2}{\chi_0^2 + n}} = \sqrt{\frac{14.47}{14.47 + 300}} = 0.215$$

قدرت یا هم خوانی شیفت کاری و سطح شغلی در حد ۲۱.۵٪ است.



دانشگاه پیام نور

مبحث دوم



در آزمون همگونی به دنبال پاسخ به این سوال هستیم که آیا جامعه‌ها (گروه‌ها) از نظر متغیر کیفی مورد نظر، مشابه‌اند (همگون هستند)؟

H_0 : دو گروه (جامعه) مورد بررسی همگون (مشابه) هستند.

H_1 : دو گروه (جامعه) مورد بررسی همگون (مشابه) نیستند.

آزمون استقلال و آزمون همگونی، دو شیوه مختلف نمونه‌برداری را ارائه می‌دهند و فرضیه‌های صفر و سوالات متفاوتی را بیان می‌کنند.

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون همگونی / مثال

قصد داریم سطح رضایت شغلی کارمندان زن و مرد یک سازمان را با هم مقایسه کنیم. فرضیه پژوهشی به این صورت مطرح شده است. "رضایت شغلی در گروه مردان و زنان یکسان است". برای بررسی این فرضیه نمونه‌ای متشکل از ۶۰ مرد و ۴۰ زن از کارکنان یک سازمان را انتخاب نموده‌ایم. این فرضیه را در سطح ۵٪ آزمون کنید.

گروه‌ها	سطح رضایت شغلی			مجموع
	بالا	متوسط	پایین	
زن	۲۵	۱۰	۵	۴۰
مرد	۱۵	۲۰	۲۵	۶۰
مجموع	۴۰	۳۰	۳۰	۱۰۰

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون همگونی / مثال

گروه‌ها	سطح رضایت شغلی			مجموع
	بالا	متوسط	پایین	
زن	۲۵ ۱۶	۱۰ ۱۲	۵ ۱۲	۴۰
مرد	۱۵ ۲۴	۲۰ ۱۸	۲۵ ۱۸	۶۰
مجموع	۴۰	۳۰	۳۰	۱۰۰

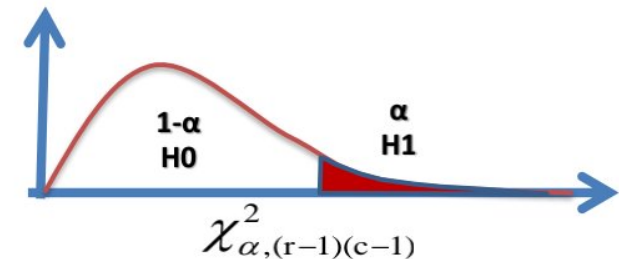
H_0 : رضایت شغلی در گروه زنان و مردان یکسان است (همگون).

H_1 : رضایت شغلی در گروه زنان و مردان یکسان نیست (ناهمگون).

$$Fe_i = \frac{(n_{i.} * n_{.j})}{n} \quad Fe_1 = \frac{(n_{1.} * n_{.1})}{n} = \frac{(40 * 40)}{100} = 16$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} = \frac{(25 - 16)^2}{16} + \frac{(10 - 12)^2}{12} + \frac{(5 - 12)^2}{12} + \dots + \frac{(20 - 18)^2}{18} + \frac{(25 - 18)^2}{18} = 15.799$$

$$\chi_{\alpha, (r-1)(c-1)}^2 = \chi_{0.05, (2-1)(3-1)}^2 = \chi_{0.05, 2}^2 = 5.99$$



کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون همگونی / مثال

به منظور بررسی نسبت افراد ناراضی در دو سازمان متفاوت، نمونه‌های جدول زیر از این دو سازمان استخراج شده است. آیا در سطح ۵٪ می‌توان گفت که نسبت افراد ناراضی در این دو سازمان یکسان است؟

سازمان‌ها	رضایت افراد		مجموع
	ناراضی	راضی	
الف	۲۵۰	۱۵۰	۴۰۰
ب	۱۵۰	۱۵۰	۳۰۰
مجموع	۴۰۰	۳۰۰	۷۰۰

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون همگونی / مثال

سازمان‌ها	رضایت افراد		مجموع
	ناراضی	راضی	
الف	۲۵۰ (۲۲۸.۵۷)	۱۵۰ (۱۷۱.۴۳)	۴۰۰
ب	۱۵۰ (۱۷۱.۴۳)	۱۵۰ (۱۲۸.۵۷)	۳۰۰
مجموع	۴۰۰	۳۰۰	۷۰۰

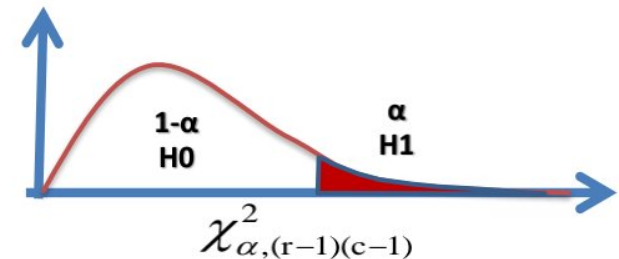
H_0 : نسبت افراد ناراضی در دو سازمان الف و ب یکسان است (همگون).

H_1 : نسبت افراد ناراضی در دو سازمان الف و ب یکسان نیست (ناهمگون).

$$Fe_i = \frac{(n_{i.} * n_{.j})}{n} \quad Fe_1 = \frac{(n_{1.} * n_{.1})}{n} = \frac{(400 * 400)}{700} = 228.57$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i} = \frac{(250 - 228.57)^2}{228.57} + \frac{(150 - 171.43)^2}{171.43} + \frac{(150 - 171.43)^2}{171.43} + \frac{(150 - 128.57)^2}{128.57} = 10.937$$

$$\chi_{\alpha, (r-1)(c-1)}^2 = \chi_{0.05, (2-1)(2-1)}^2 = \chi_{0.05, 1}^2 = 3.841$$



کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون همگونی / مثال

سازمان‌ها	رضایت افراد		مجموع
	ناراضی	راضی	
الف	۲۵۰	۱۵۰	۴۰۰
ب	۱۵۰	۱۵۰	۳۰۰
مجموع	۴۰۰	۳۰۰	۷۰۰

$$H_0 : p_1 = p_2$$

H_0 : نسبت افراد ناراضی در دو سازمان الف و ب یکسان است (همگون).

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

H_1 : نسبت افراد ناراضی در دو سازمان الف و ب یکسان نیست (ناهمگون).

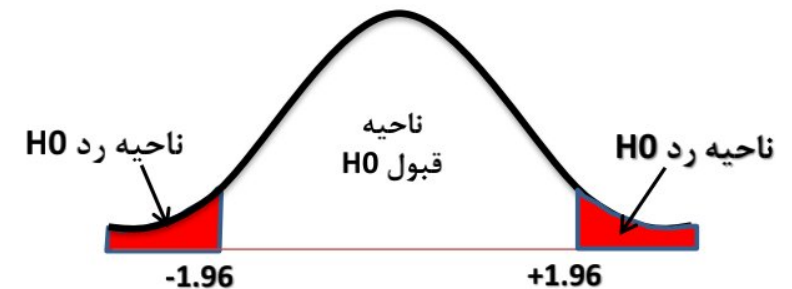
$$\bar{p}_1 = \frac{250}{400} = 0.625$$

$$\bar{p}_2 = \frac{150}{300} = 0.50$$

$$\bar{p} = \frac{250+150}{700} = 0.571$$

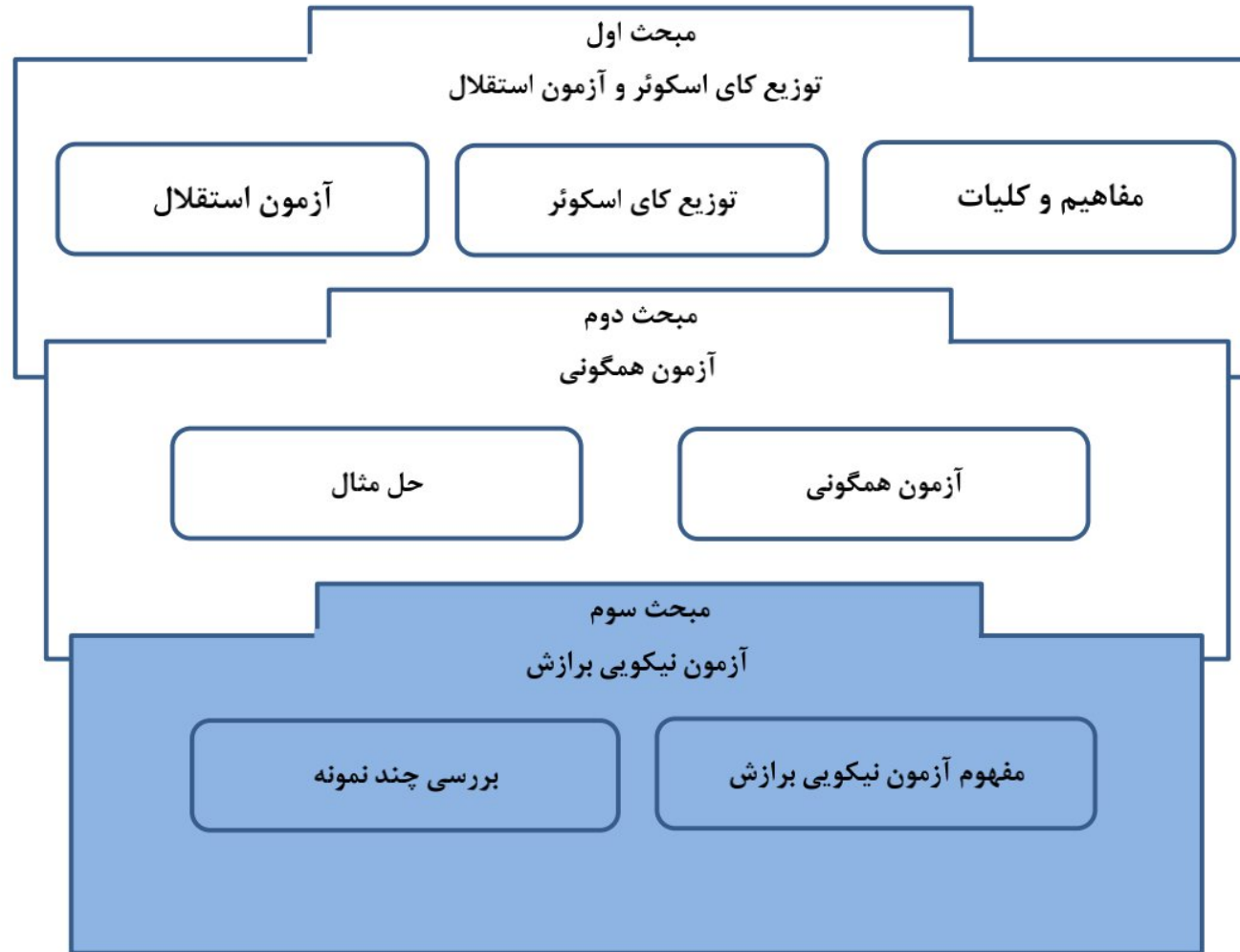
$$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{0.625 - 0.50}{\sqrt{0.571(0.429)} \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{300}}} = 3.307$$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = \pm 1.96$$



کاربردهای آزمون کای اسکوتر / آزمون همگونی

آزمون	آماره	مقدار آماره محاسبه شده	مقدار آماره جدول
همگونی از طریق توزیع کای اسکوتر	$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$	۱۰.۹۳۷	۳.۸۴۱
نسبت از طریق توزیع Z	$Z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	۳.۳۰۷	۱.۹۶



مبحث سوم

آزمون برازندگی زمانی مهم است که پژوهشگر بخواهد در مورد سازگاری و ناسازگاری یک توزیع مشاهده شده با توزیع نظری تصمیم بگیرد.

به عنوان مثال: آیا نمونه استخراج شده از یک جامعه نرمال انتخاب شده است؟

شیوه تصمیم‌گیری به این صورت است که مقادیر در طبقه‌های ناسازگار قرار داده شده و فراوانی هر طبقه مشخص می‌گردد. سپس براساس توزیع مورد نظر نیز فراوانی‌های مورد انتظار محاسبه می‌گردند و در نهایت با فراوانی‌های مشاهده شده مقایسه می‌گردند.

H_0 : داده‌ها از توزیع مورد نظر برخوردارند.

H_1 : داده‌ها از توزیع مورد نظر برخوردار نیستند.

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع نرمال)

فرض کنید طول ۱۰۰ میله فلزی تولیدی یک کارخانه اندازه گیری شده و در جدول زیر خلاصه شده است. آیا طول میله های فلزی تولیدی این کارخانه دارای توزیع نرمال است؟ برای استفاده از توزیع نرمال لازم است که مقادیر μ_x و σ_x^2 را تخمین بزنیم.

تعداد (Fo_i)	طول (میلیمتر)
۱	۸۰-۸۹
۰	۹۰-۹۹
۳	۱۰۰-۱۰۹
۱۰	۱۱۰-۱۱۹
۱۹	۱۲۰-۱۲۹
۲۱	۱۳۰-۱۳۹
۲۳	۱۴۰-۱۴۹
۱۱	۱۵۰-۱۵۹
۸	۱۶۰-۱۶۹
۱	۱۷۰-۱۷۹
۲	۱۸۰-۱۸۹
۱	۱۹۰-۱۹۹
۱۰۰	جمع

$$\bar{X} = \frac{\sum Fo_i X_i}{\sum Fo_i}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 Fo_i}{\sum Fo_i - 1}$$

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع نرمال)

طول (میلیمتر)	تعداد (Fo_i)	حدود واقعی طبقات		نماینده طبقات (m_i)	$(Fo_i * m_i)$	$Fo_i * (m_i - \bar{x})^2$
		حد پایین	حد بالا			
۸۰-۸۹	۱	۷۹.۵	۸۹.۵	۸۴.۵	۸۴.۵	۲۸۷۲.۹۶
۹۰-۹۹	۰	۸۹.۵	۹۹.۵	۹۴.۵	۰	۰
۱۰۰-۱۰۹	۳	۹۹.۵	۱۰۹.۵	۱۰۴.۵	۳۱۳.۵	۳۳۸۶.۸۸
۱۱۰-۱۱۹	۱۰	۱۰۹.۵	۱۱۹.۵	۱۱۴.۵	۱۱۴۵	۵۵۶۹.۶
۱۲۰-۱۲۹	۱۹	۱۱۹.۵	۱۲۹.۵	۱۲۴.۵	۲۳۶۵.۵	۳۵۱۴.۲۴
۱۳۰-۱۳۹	۲۱	۱۲۹.۵	۱۳۹.۵	۱۳۴.۵	۲۸۲۴.۵	۲۷۲.۱۶
۱۴۰-۱۴۹	۲۳	۱۳۹.۵	۱۴۹.۵	۱۴۴.۵	۳۳۲۳.۵	۹۴۲.۰۸
۱۵۰-۱۵۹	۱۱	۱۴۹.۵	۱۵۹.۵	۱۵۴.۵	۱۶۹۹.۵	۲۹۵۸.۵۶
۱۶۰-۱۶۹	۸	۱۵۹.۵	۱۶۹.۵	۱۶۴.۵	۱۳۱۶	۵۵۷۵.۶۸
۱۷۰-۱۷۹	۱	۱۶۹.۵	۱۷۹.۵	۱۷۴.۵	۱۷۴.۵	۱۳۲۴.۹۶
۱۸۰-۱۸۹	۲	۱۷۹.۵	۱۸۹.۵	۱۸۴.۵	۳۶۹	۴۳۰.۵۹۲
۱۹۰-۱۹۹	۱	۱۸۹.۵	۱۹۹.۵	۱۹۴.۵	۱۹۴.۵	۳۱۸۰.۹۶
جمع	۱۰۰	--	--	--	۱۳۸۱۰	۳۳۹۰.۴

$$\bar{X} = \frac{\sum Fo_i X_i}{\sum Fo_i} = \frac{13810}{100} = 138.1$$

$$S_x^2 = \frac{\sum Fo_i * (m_i - \bar{x})^2}{\sum Fo_i - 1} = \frac{33904}{99} = 342.46$$

$$S_x = \sqrt{342.46} = 18.50$$

کاربردهای آزمون کای اسکوتر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع نرمال)

حدود واقعی طبقات		مقدار استاندارد (Z)	احتمال تجمعی	فراوانی تجمعی مورد انتظار	فراوانی مورد انتظار
حد بالا	حد پایین				
۷۹.۵	و کمتر	-۳.۱۷	۰.۰۰۰۰۸	۰	۰
۸۹.۵	۷۹.۵	-۲.۶۳	۰.۰۰۴۳	۰.۴	۰.۴
۹۹.۵	۸۹.۵	-۲.۰۹	۰.۰۱۸۳	۱.۸	۱.۴
۱۰۹.۵	۹۹.۵	-۱.۵۵	۰.۰۶۰۶	۶.۱	۴.۳
۱۱۹.۵	۱۰۹.۵	-۱.۰۱	۰.۱۵۶۲	۱۵.۶	۹.۵
۱۲۹.۵	۱۱۹.۵	-۰.۴۶	۰.۳۲۲۸	۳۲.۳	۱۶.۷
۱۳۹.۵	۱۲۹.۵	۰.۰۸	۰.۵۳۱۹	۵۳.۲	۲۰.۹
۱۴۹.۵	۱۳۹.۵	۰.۶۲	۰.۷۳۲۴	۷۳.۲	۲۰.۰
۱۵۹.۵	۱۴۹.۵	۱.۱۶	۰.۸۷۷۰	۸۷.۷	۱۴.۵
۱۶۹.۵	۱۵۹.۵	۱.۷۰	۰.۹۵۵۴	۹۵.۵	۷.۸
۱۷۹.۵	۱۶۹.۵	۲.۲۴	۰.۹۸۷۵	۹۸.۷	۳.۲
۱۸۹.۵	۱۷۹.۵	۲.۷۸	۰.۹۹۷۳	۹۹.۷	۱.۰
۱۹۹.۵	۱۸۹.۵	۳.۳۲	۰.۹۹۹۵۲	۹۹.۹	۰.۲
و بیشتر	۱۹۹.۵	∞	۱	۱۰۰	۰.۱
مجموع	--	--	--	--	۱۰۰

حد بالا برای x	Fe_i
۱۰۹.۵	۶.۱
۱۱۹.۵	۹.۵
۱۲۹.۵	۱۶.۷
۱۳۹.۵	۲۰.۹
۱۴۹.۵	۲۰.۰
۱۵۹.۵	۱۴.۵
۱۶۹.۵	۷.۸
∞	۴.۵
جمع	۱۰۰

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \Rightarrow Z = \frac{X - \bar{X}}{S_x}$$

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S_x} = \frac{79.5 - 138.1}{18.5} = -3.17$$

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S_x} = \frac{89.5 - 138.1}{18.5} = -2.63$$

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع نرمال)

حد بالا برای x	Fe_i	Fo_i	$\frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$
۱۰۹.۵	۶.۱	۴	۰.۷۲۳
۱۱۹.۵	۹.۵	۱۰	۰.۰۲۶
۱۲۹.۵	۱۶.۷	۱۹	۰.۳۱۷
۱۳۹.۵	۲۰.۹	۲۱	۰.۰۰۰
۱۴۹.۵	۲۰.۰	۲۳	۰.۴۵۰
۱۵۹.۵	۱۴.۵	۱۱	۰.۸۴۵
۱۶۹.۵	۷.۸	۸	۰.۰۰۵
∞	۴.۵	۴	۰.۰۵۶
جمع	۱۰۰	۱۰۰	۲.۴۲۲

$$df = k - p - 1 \Rightarrow df = 8 - 2 - 1 = 5$$

$$\chi^2_{\alpha, df} = \chi^2_{0.05, 5} = 11.07$$

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع پواسن)

برای بررسی اینکه آیا تعداد اتومبیل‌هایی که به فاصله ۱۵ دقیقه از یک اتوبان خاص می‌گذرند دارای توزیع پواسن است یا خیر، در ۷۶ مورد تعداد اتومبیل‌هایی که از یک نقطه به مدت ۱۵ دقیقه عبور کرده‌اند ثبت شده است. این فرض که توزیع تعداد اتومبیل‌های عبوری، پواسن است را در سطح خطای ۵٪ آزمون کنید.

$$\bar{X} = \bar{\lambda} = \frac{\sum Fo_i X_i}{\sum Fo_i} = \frac{349}{76} = 4.6$$

تعداد اتومبیل‌های عبوری (X_i)	دفعات مشاهده شده (Fo_i)	$Fo_i * X_i$
۰	۱	۰
۱	۴	۴
۲	۸	۱۶
۳	۶	۱۸
۴	۱۷	۶۸
۵	۱۸	۹۰
۶	۱۳	۷۸
۷	۳	۲۱
۸	۳	۲۴
۹	۱	۹
۱۰	۱	۱۰
۱۱	۱	۱۱
۱۲	۰	۰
مجموع	۷۶	۳۴۹

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع پواسن)

تعداد اتومبیل‌های عبوری (X_i)	دفعات مشاهده شده (Fo_i)	$P(X = x_i)$	Fe_i
۰	۱	۰.۰۱۰۰۵	۰.۸
۱	۴	۰.۰۴۶۲۴	۳.۵
۲	۸	۰.۱۰۶۳۵	۸.۱
۳	۶	۰.۱۶۳۰۷	۱۲.۴
۴	۱۷	۰.۱۸۷۵۳	۱۴.۳
۵	۱۸	۰.۱۷۲۵۳	۱۳.۱
۶	۱۳	۰.۱۳۲۲۷	۱۰.۱
۷	۳	۰.۰۸۶۹۲	۶.۶
۸	۳	۰.۰۴۹۹۸	۳.۸
۹	۱	۰.۰۲۵۵۴	۱.۹
۱۰	۱	۰.۰۱۱۷۵	۰.۹
۱۱ و بیشتر	۱	۰.۰۱۱۸	۰.۵
مجموع	۷۶	۱.۰۰	۷۶

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$Fe_i = n * P(X = x_i)$$

X_i	Fo_i	Fe_i	$\frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$
۰ و ۱	۱۳	۱۲.۴۰	۰.۰۳
۳	۶	۱۲.۴۰	۳.۳۰
۴	۱۷	۱۴.۳۰	۰.۵۱
۵	۱۸	۱۳.۱۰	۱.۸۳
۶	۱۳	۱۰.۱۰	۰.۸۳
۷	۳	۶.۶۰	۱.۹۶
۸ و بیشتر	۶	۷.۱۰	۰.۱۷
مجموع	۷۶	۷۶	۸.۶۳

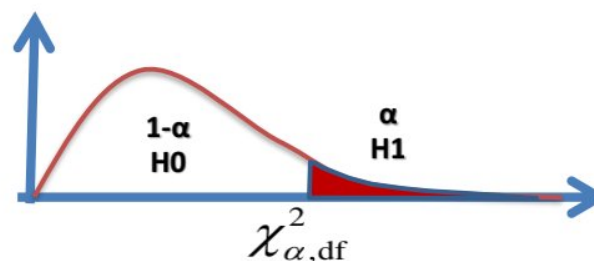
کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع پواسن)

H_0 : داده‌ها از توزیع پواسن با میانگین 4.6 برخوردارند.

H_1 : داده‌ها از توزیع پواسن با میانگین 4.6 برخوردار نیستند.

$$df = 7 - 1 - 1 = 5$$

$$\chi^2_{\alpha, df} = \chi^2_{0.05, 5} = 11.07$$



X_i	FO_i	FE_i	$\frac{(FO_i - FE_i)^2}{FE_i}$
۰ و ۱ و ۲	۱۳	۱۲.۴۰	۰.۰۳
۳	۶	۱۲.۴۰	۳.۳۰
۴	۱۷	۱۴.۳۰	۰.۵۱
۵	۱۸	۱۳.۱۰	۱.۸۳
۶	۱۳	۱۰.۱۰	۰.۸۳
۷	۳	۶.۶۰	۱.۹۶
۸ و بیشتر	۶	۷.۱۰	۰.۱۷
مجموع	۷۶	۷۶	۸.۶۳

کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع یکنواخت)

جدول زیر نشان دهنده ۱۰۰ عدد تصادفی است که توسط کامپیوتر تولید شده است. می خواهیم بدانیم که آیا در سطح خطای

۵٪ می توان پذیرفت که توزیع فراوانی این اعداد یکنواخت است ؟

اعداد تصادفی	Fo_i
۰	۱۳
۱	۸
۲	۱۲
۳	۱۱
۴	۱۰
۵	۵
۶	۷
۷	۱۱
۸	۱۱
۹	۱۲
مجموع	۱۰۰

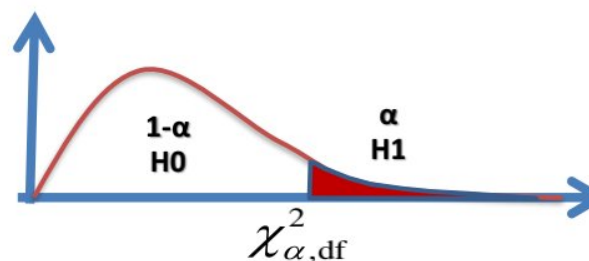
کاربردهای آزمون کای اسکوئر / آزمون نیکویی برازش / مثال (توزیع یکنواخت)

اعداد تصادفی	Fo_i	$Fe_i = n * \frac{1}{10}$	$\frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$
۰	۱۳	۱۰	۰.۹۰
۱	۸	۱۰	۰.۴۰
۲	۱۲	۱۰	۰.۴۰
۳	۱۱	۱۰	۰.۱۰
۴	۱۰	۱۰	۰.۰۰
۵	۵	۱۰	۲.۵
۶	۷	۱۰	۰.۹۰
۷	۱۱	۱۰	۰.۱۰
۸	۱۱	۱۰	۰.۱۰
۹	۱۲	۱۰	۰.۴۰
مجموع	۱۰۰	۱۰۰	۵.۸

H_0 : داده‌ها از توزیع یکنواخت برخوردارند.

H_1 : داده‌ها از توزیع یکنواخت برخوردار نیستند.

$$df = k - p - 1 = 10 - 0 - 1 = 9 \quad \chi^2_{\alpha, df} = \chi^2_{0.05, 9} = 16.919$$



کاربردهای آزمون کای اسکوئر / خلاصه مطالب مطرح شده

در مبحث کاربردهای آزمون کاری اسکوئر، در مورد استفاده‌های متنوع این توزیع بحث شد از جمله:

آزمون استقلال

آزمون همگونی

آزمون نیکویی برازش.

اگرچه این آزمون‌ها از نظر ریاضی معادل یکدیگرند اما از نظر مفهومی با هم متفاوت هستند.